

“..the central mystery of quantum mechanics”  
Das Feynmann'sche Doppelspaltexperiment und  
die Interpretation der Quantenmechanik

Ulf Klein

Institut für Theoretische Physik, Universität Linz

A-4040 Linz-Auhof, Austria

*e-mail* : ulf.klein@jku.at

Notiz zur Vorlesung Quantenmechanik im SS2007. Im ersten Kapitel wird die Feynman'sche Diskussion des Doppelspaltexperiments [8] und die daraus abgeleitete (Kopenhagener) Interpretation der Quantenmechanik zusammengefaßt. Im zweiten Kapitel wird der erfolglose Versuch unternommen die Entstehung dieser Interpretation nachzuvollziehen. Im dritten Kapitel wird als Alternative, die besser zum experimentellen Befund passt, die sog. “statistische Interpretation” der Quantenmechanik in Erinnerung gerufen. Hier und in einem großen Teil des Rests dieser Notizen folge ich dem Übersichtsartikel von Ballentine [2] bzw. seinem Lehrbuch über Quantenmechanik [3]. Im vierten und fünften Kapitel werden zwei weitere, für die Interpretation der Quantentheorie wichtige Aspekte besprochen, nämlich das EPR-Experiment und die Unbestimmtheitsrelation. Nach einer kurzen Analyse des Messvorgangs im sechsten Kapitel werden im siebenten Kapitel die grundlegenden Konzepte der Quantentheorie, wie sie sich aus der statistischen Betrachtungsweise ergeben, besprochen. Mit einigen ergänzenden Bemerkungen im achten Kapitel endet diese Notiz.

# 1 Doppelspalt Experiment und Interpretation

Wir fassen die bekannte Feynmann'sche Darstellung des Doppelspaltexperiments - im ersten Kapitel seines Lehrbuchs über Quantenmechanik [8] - zusammen. Die Darstellung in diesem Kapitel folgt sehr eng, wenn auch nicht wörtlich diesem Lehrbuch, abgesehen von einigen ergänzenden Zusatzbemerkungen in eckigen Klammern. Der Leser wird von Feynman schrittweise, an Hand von sechs Experimenten, in die Problematik eingeführt.

- (1) Ein Experiment mit Kugeln (Fig.1-1 in [8])

Ein homogener Strahl von Kugeln trifft auf einen Doppelspalt. Hinter dem

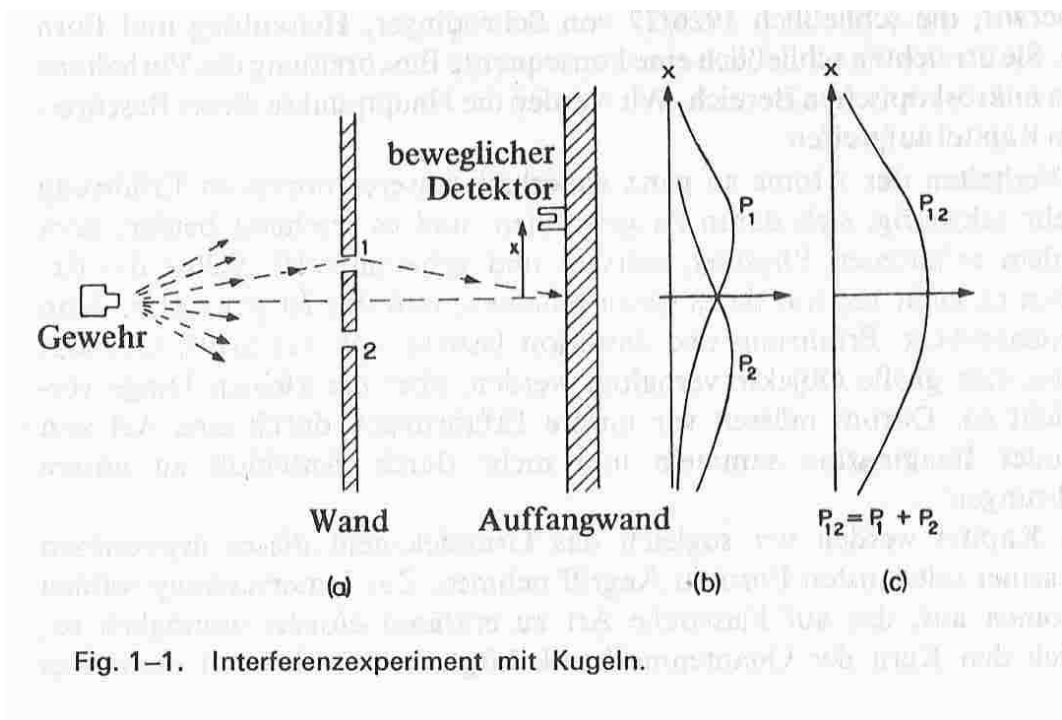


Fig. 1-1. Interferenzexperiment mit Kugeln.

Doppelspalt ist eine Wand, die die Rolle eines Detektors spielt. Dieser Detektor registriert die auf der Wand auftreffenden Kugeln; registriert wird der Ort des Auftreffens und die Anzahl der Kugeln (weitere wird angenommen, daß die Kugeln beim Auftreffen nicht zerstört werden). Mit Hilfe der Zahl der am Detektor auftreffenden Kugeln kann man für jeden Punkt eine Auftreffwahrscheinlichkeit  $P$  definieren. Es sei  $P_1$  die so gemessene Auftreffwahrscheinlichkeit bei geschlossenem Spalt 2 (und geöffnetem Spalt 1) und  $P_2$  die Auftreffwahrscheinlichkeit bei geschlossenem Spalt 1 (und geöffnetem Spalt 2). Wenn sowohl Spalt 1 als auch Spalt 2 geöffnet sind werde die Auftreffwahrscheinlichkeit  $P_{12}$  gemessen. Das Experiment zeigt, daß  $P_i$  eine symmetrische Form mit einem einzigen Maximum hat, das

gegenüber dem Spalt  $i$  liegt. Weiters zeigt der Vergleich der Daten, daß

$$P_{12} = P_1 + P_2, \quad (1)$$

gilt, daß sich also die beiden Wahrscheinlichkeiten linear überlagern.

Das Resultat dieses Experimentes ist vollkommen im Einklang mit unserer Erwartung; die Kugeln bleiben immer Kugeln (lokalisierte Objekte, Teilchen) und wenn man viele Kugeln betrachtet, so sind sie unabhängig voneinander (die Wahrscheinlichkeiten addieren sich einfach).

- (2) Ein Experiment mit Wellen (Fig.1-2 in [8])  
 Kreisförmige Wasserwellen (als generisches Beispiel), die z.B. auf einer

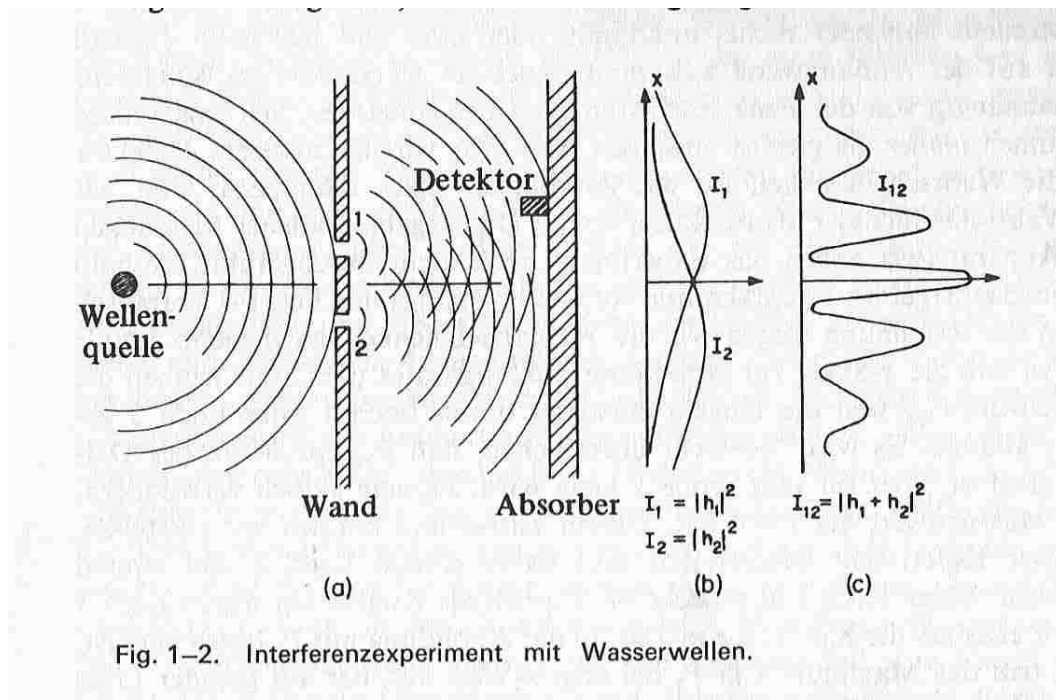


Fig. 1–2. Interferenzexperiment mit Wasserwellen.

Wasseroberfläche erzeugt werden, treffen auf einen Doppelspalt. Dahinter ist wieder eine Vorrichtung, die mißt “wie viel” von der Welle an einem bestimmten Punkt zu einer bestimmten Zeit auftritt. Als Maß dafür, “wie viel” von der Welle an einem Raum-Zeitpunkt vorhanden ist, kann man die Höhe der Welle (an diesem Raum-Zeitpunkt) oder eine monotone Funktion hiervon nehmen. Man interessiert sich hier aber für eine zeitunabhängige Größe, betrachtet also den zeitlichen Mittelwert z.B. des Quadrats der Höhe der Welle an einem bestimmten Punkt. Diese Größe wird als Intensität  $I$  der Welle bezeichnet, sie ist positiv definit und nur mehr vom Ort abhängig, und insofern analog zu der zeitunabhängigen Wahrscheinlichkeit  $P$  beim

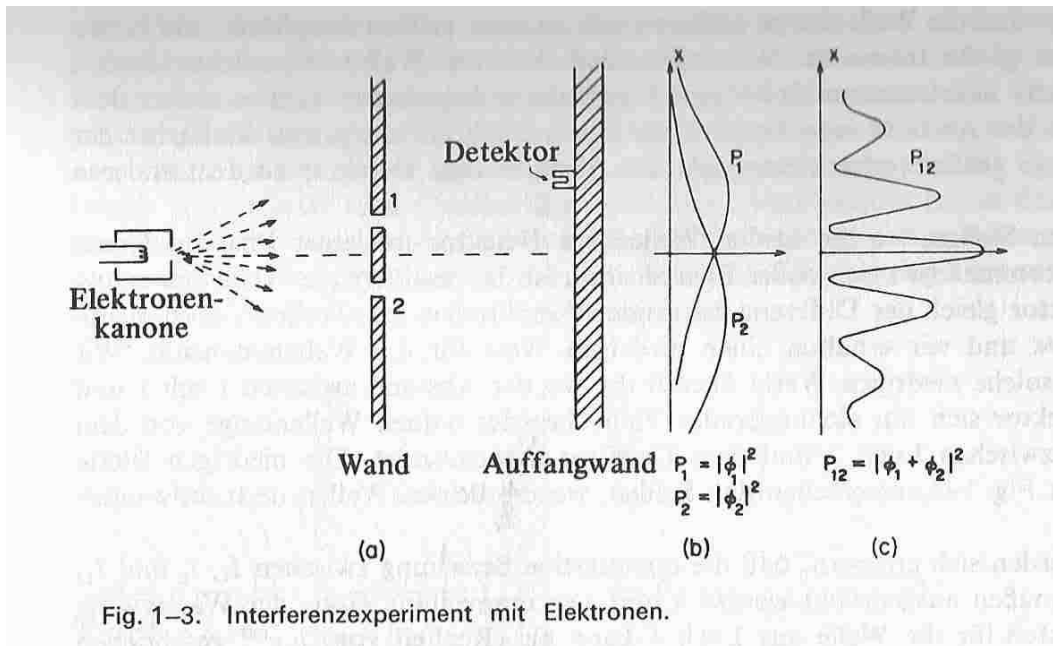
Teilchenstrahl. Der Detektor hinter dem Doppelspalt messe also  $I$  (Eine derartige Apparatur ist realisierbar. Um unerwünschte Komplikationen zu vermeiden, muß man auch sicherstellen, daß die am Detektor ankommenden Wellen nicht reflektiert werden. Der Detektor muß also auch ein Absorber sein; auch das kann realisiert werden).

Die Größen  $I_1, I_2, I_{12}$  sind analog wie im letzten Punkt definiert. Fig.1-2 zeigt das Resultat des Experiments. Die Intensitäten  $I_1$  und  $I_2$  haben dieselbe einfache Struktur wie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten  $P_1$  und  $P_2$  bei dem Experiment mit den Kugeln (letzter Punkt). Die Intensität  $I_{12}$  hat aber wenig Ähnlichkeit mit  $P_{12}$  und stimmt nicht mehr mit  $I_1 + I_2$  überein. Das Phänomen, daß  $I_{12}$  von  $I_1 + I_2$  abweicht, wird als Interferenz bezeichnet.

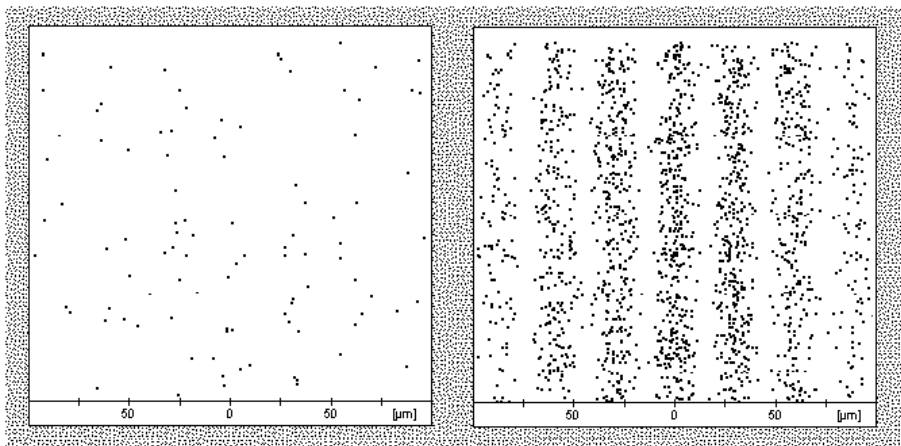
Trotz dieses Unterschieds ist auch das Resultat dieses Experiments eigentlich nicht überraschend. Das Verhalten kontinuierlich ausgebreiteter Größen ist uns ja aus der Erfahrung (am offensichtlichsten bei Flüssigkeiten) bekannt. Daß in so einem Medium jeder Teil Einfluß auf jeden anderen Teil hat, ist logisch verständlich; Wellen und Interferenzen treten auch manchmal im Alltag auf. Auch die mathematische Beschreibung von Wellen [An einem bestimmten Punkt wird der zeitliche Verlauf durch den Realteil von  $he^{i\omega t}$  beschrieben (wo  $h$  eine komplexe Zahl ist). Die Überlagerung zweier Wellen hat die Form  $(h_1 + h_2)e^{i\omega t}$ . Die Intensität  $I_{12}$  ist die Summe von  $I_1$  und  $I_2$  und einem Interferenzterm] zeigt in einfacher Weise das Phänomen der Interferenz.

(3) Ein Experiment mit Elektronen (Fig.1-3 in [8])

Nun trifft ein homogener (mit Hilfe einer Potentialdifferenz erzeugter) Strahl von Elektronen auf den Doppelspalt. Hinter dem Doppelspalt ist wieder eine Auffangwand, auf der das Eintreffen der Elektronen (an jedem Punkt und zu jeder Zeit) registriert bzw. detektiert wird. Die Rolle eines Detektors übernimmt ein Geigerzähler, der verschieblich angeordnet ist. Wenn ein Elektron an dem gewählten Punkt (am Ort des Detektors) auftritt, hört man ein Klicken. Man kann die Lautstärke des Klickens und den Zeitpunkt (die Häufigkeit) während einer beliebig langen Zeit aufzeichnen. Das Ganze kann man dann für jeden Punkt auf der Auffangwand wiederholen. Die Dichte der einfallenden Elektronen bleibt während des ganzen Experiments unverändert. [Diese Versuchsanordnung ist so nicht realisierbar, weil man den verschieblichen Geigerzähler nicht mikroskopisch klein machen kann. Das Experiment ist als "Gedankenexperiment" zu betrachten. Im derzeitigen Zusammenhang bedeutet das, daß das Experiment zwar nicht durchführbar ist, daß man aber auf Grund der Resultate von anderen, komplizierteren Experimenten weiß was herauskommen würde, wenn man das Experiment durchführen könnte]



Wenn man in dieser Weise die Elektronen detektiert, stellt man als erstes fest, daß die Lautstärke aller Klicks gleich ist. Das deutet darauf hin, daß die Elektronen eher den Charakter von Kugeln (Teilchen) als von Wellen (Feldern) haben. Wenn man zwei Detektoren aufstellt, kann man niemals feststellen daß beide Detektoren genau zur gleichen Zeit klicken. Auch das ein Hinweis auf die Tatsache, daß es sich bei den Elektronen um mehr oder weniger scharf lokalisierte (teilchenartige) Dinge handelt. Die Abstände zwischen den Klicks sind nicht gleich, sondern statistisch verteilt. Das Interferenzmuster, das sich bei zunehmender Dichte der Klicks abzeichnet, ist in der folgenden Figur [13] zu sehen. Auf Grund dieser Klicks kann man



nun, durch fortgesetzte Messungen, für jeden Punkt Wahrscheinlichkeiten für das Auftreffen der Elektronen angeben. Die Wahrscheinlichkeiten  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_{12}$  sind wie oben definiert.

Fig.1-3 zeigt das Resultat des Experiments. Das Verhalten von  $P_1$  und  $P_2$  stimmt mit dem Verhalten der Kugeln beim ersten Experiment überein und ist also mit den bisherigen (ziemlich überzeugenden) Hinweisen auf die teilchenartige Natur der Elektronen verträglich. Im Gegensatz dazu stimmt  $P_{12}$  nicht mit dem Verhalten der Kugeln überein, sondern zeigt Interferenz und stimmt qualitativ mit dem Verhalten von  $I_{12}$ , das beim zweiten Experiment mit Wellen beobachtet wurde, überein.

Die direkte Schlußfolgerung bzw. erste Interpretation der Daten ist die folgende: Die Elektronen treffen als Teilchen auf dem Auffangschirm auf, ihre Auftreffwahrscheinlichkeit ist aber dieselbe wie bei einer Welle. In diesem Sinn verhält sich das Elektron sowohl wie ein Teilchen (wenn es für sich allein betrachtet wird) als auch wie eine Welle (wenn seine statistische Verteilung als eines unter vielen betrachtet wird).

Man kann verschiedene Fragen stellen um dieses Experiment genauer zu analysieren und besser zu verstehen. Die Tatsache daß für die Wahrscheinlichkeiten

$$P_{12} \neq P_1 + P_2, \quad (2)$$

gilt, bedeutet daß die mittlere Zahl der Elektronen die (immer an einem bestimmten Punkt) auf dem Schirm auftreffen, nicht - wie im ersten Experiment mit den Kugeln - die Summe der Elektronen ist, die durch die einzelnen Spalte (bei jeweils *geschlossenem* anderem Spalt) fliegen. Um diesem Verhalten auf den Grund zu gehen, kann man sich z.B. die Frage stellen, ob sich die Elektronen immer - auch beim Durchgang durch die Spalte - wie Teilchen verhalten. D.h. man kann sich fragen, ob die

*Behauptung A:* Jedes Elektron geht *entweder* durch Spalt 1 *oder* durch Spalt 2

richtig ist. Wenn Behauptung A stimmt, dann ist die Anzahl der Elektronen die an einem bestimmten Punkt ankommen gleich der Anzahl der Elektronen die durch Spalt 1 kommen plus der Anzahl der Elektronen die durch Spalt 2 kommen (es wird der Fall betrachtet daß *beide* Spalte geöffnet sind). Behauptung A wird im nächsten Experiment untersucht. Das Nichtzutreffen von Behauptung A (also die Tatsache, daß ein "Teil" des Elektrons durch den ersten Spalt und der andere "Teil" des Elektrons durch den zweiten Spalt geht), würde den Teilchencharakter der Elektronen (bei Einzelereignissen) in Frage stellen (dies würde zwar neue Fragen aufwerfen, könnte aber das Phänomen der Interferenz vielleicht verständlicher machen).

(4) Beobachtung der Elektronen (Fig.1-4 in [8])

Die Versuchsanordnung ist ähnlich wie beim dritten Experiment. Wieder

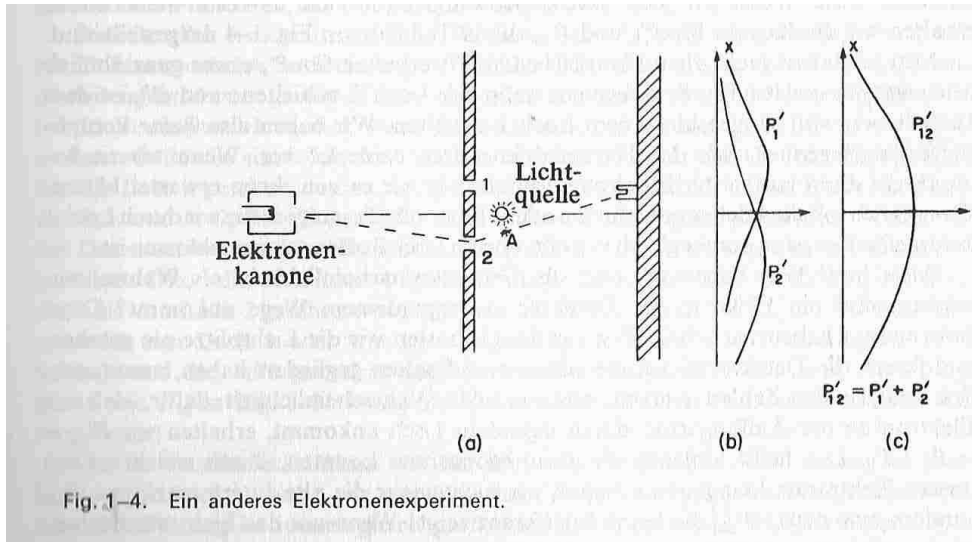


Fig. 1-4. Ein anderes Elektronenexperiment.

trifft ein homogener Strahl von Elektronen auf den Doppelspalt. Beide Spalte sind geöffnet. An der Auffangwand hinter dem Doppelspalt wird wieder das Eintreffen der Elektronen mit Hilfe eines Detektors registriert. Was im Vergleich zum dritten Experiment neu ist, ist eine Lichtquelle, die zwischen den beiden Spalten angebracht ist. Wenn das von dieser Lichtquelle kommende Licht mit einem Elektron in Kontakt kommt (gestreut wird) wird ein Lichtblitz ausgesandt. Wenn der Lichtblitz nur aus der Umgebung des unteren/oberen Spaltes kommt, weiß man daß das Elektron nur durch den unteren/oberen Spalt durchgeht. Wenn man sowohl aus der Umgebung des oberen und unteren Spaltes (gleichzeitig) Lichtblitze beobachtet, weiß man, daß das Elektron durch beide Spalte fliegt. Bei diesem Experiment wird also sowohl das Verhalten der Elektronen beim Durchgang durch den Spalt (oder die Spalte) als auch der Ort des Auftreffens am Schirm gemessen (beobachtet). Durch Abzählen der oberen und unteren Lichtblitze und der Klicks des Detektors kann man wieder Wahrscheinlichkeiten  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_{12}$  ermitteln.

Das Experiment zeigt, daß niemals Lichtblitze gleichzeitig vom oberen *und* unteren Spalt ausgesandt werden. Behauptung A ist also richtig. Was die statistischen Daten  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_{12}$  betrifft, so stellt man fest daß überraschenderweise wieder  $P_{12} = P_1 + P_2$  gilt; das Verhalten stimmt qualitativ mit dem der Kugeln überein und das Interferenzspektrum des dritten Experiments ist weg, obwohl beide Spalte offen waren. Der einzige Unterschied zwischen dem dritten Experiment und dem jetzigen ist die Lichtquelle, bzw. die von ihr ausgesandten Lichtblitze, die die Beobachtung, bzw. Information, durch

welchen Spalt das Elektron geht, beinhalten. Diese Beobachtung muß also für das Verschwinden der Interferenz verantwortlich sein. Erwähnenswert ist auch, daß die Beobachtung (mit Hilfe der Lichtblitze), durch welchen Spalt das Elektron jeweils geht, im wesentlichen den selben Effekt hat, wie das abwechselnde Schließen der Spalte.

Die Richtigkeit der Behauptung A bestätigt den Teilchencharakter der Elektronen bei Einzelereignissen. Zumindest immer dann, wenn man "hinschaut" verhält sich das Elektron (im Einzelexperiment) wie ein Teilchen.

Mysteriös ist das Verschwinden des Interferenzmusters (obwohl beide Spalte offen sind) allein auf Grund der Beobachtung der Elektronen am Spalt. Man denkt sofort an eine Wechselwirkung zwischen Elektron und Lichtwelle, die - auf irgendeine, im einzelnen noch ungeklärte Art und Weise - das Elektron verschiebt und damit verhindert, daß es dort auftritt, wo es auf Grund des Interferenzmusters hingehört. Man kann versuchen, diese Vermutung auf folgende Weise zu klären: Man macht die Störung der Elektronenbahn, die mit der Ortsmessung (ich verwende den Ausdruck Ortsmessung hier als Abkürzung für: "Identifizierung des Spalts, durch den die Elektronen durchgehen") verknüpft ist, kleiner - man nimmt an, daß das ohne Verlust an Information bezüglich der Ortsmessung möglich ist. Dann wird die Störung der Elektronenbahn kleiner, man weiß aber immer noch von jedem Elektron durch welchen Spalt es geht. Wenn das experimentell möglich ist, sollte das Interferenzmuster wiederkommen (wenn die Vermutung stimmt).

Man muss also die Wechselwirkung zwischen Licht und Elektron kleiner machen. Man kann versuchen, dies zu erreichen, indem man die Lichtquelle schwächer macht. Wenn man das tut, werden aber die Lichtblitze die bei einer erfolgten Ortsmessung ausgesandt werden, nicht schwächer, sondern nur seltener. Wenn ein Lichtblitz ausgesandt wird, hat er immer die gleiche Stärke. Wenn das Licht schwächer wird, werden die Lichtblitze seltener; manchmal hört man ein Klicken am Detektor ohne daß ein Lichtblitz zu sehen ist. Das bedeutet, daß die Ortsmessung mit Licht nicht funktioniert hat; das am Schirm angekommene Elektron ist durch einen der beiden Spalte gelaufen (vermutlich tat es das) - man weiß aber nicht durch welchen. Man kann nun für die Elektronen, die ankommen (wie man auf Grund der Klicks des Detektors weiß) aber keine Lichtblitze erzeugen getrennt Buch führen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung ermitteln. Wenn man das tut, findet man, daß sie sehr wohl Interferenz zeigen. Wenn mehr und mehr Elektronen unentdeckt bleiben (weil man die Lichtquelle schwächer und schwächer macht) zeigt die (totale) Wahrscheinlichkeitsverteilung mehr und mehr Ähnlichkeit mit dem Interferenzmuster vom dritten Experiment (wo die Ortsmessung überhaupt nicht durchgeführt wurde). Die Idee mit dem schwächer werdenden Licht hat also nicht so funktioniert wie geplant. Die Annahme (Hoffung), dass man durch Verringerung der Störung das In-



terferenzmuster zurückgewinnen kann, ohne einen Verlust an Information bezüglich der Ortsmessung in Kauf nehmen zu müssen, konnte bei diesem Experiment nicht realisiert werden. Stattdessen wurde eine Reziprozität beobachtet; je ungenauer die Ortsmessung wurde, umso besser wurde das Interferenzmuster und je genauer die Ortsmessung wurde, umso schlechter wurde das Interferenzmuster.

Vielleicht tritt diese Reziprozität nur auf, wenn man die Wechselwirkung zwischen Licht und Elektron *auf diese spezielle Weise* (durch Verminderung der Lichtstärke) kleiner macht. Vielleicht gelingt es mit einer anderen Methode, die Wechselwirkung zwischen Licht und Elektron so zu verringern, daß die obige Idee realisiert werden kann. Man kann z.B. versuchen die Wellenlänge des Lichts zu vergrößern; dadurch nimmt die Energie ab und die Störung der Elektronenbahn sollte auch geringer werden. Auch diese Methode funktioniert nicht. Wenn man die Störung auf diese Weise geringer macht, wird der Lichtblitz breiter. Die Ortsmessung wird dadurch ungenauer, einige Zeit lang funktioniert es noch aber wenn sich die Wellenlänge der Größe des Abstands zwischen den zwei Spalten annähert, wird der Blitz so breit, daß man kaum mehr sagen kann, durch welchen Spalt das Elektron durchgegangen ist. Wenn das passiert, wenn also die Ortsmessung nicht mehr wirklich funktioniert, beginnt die Wahrscheinlichkeitsverteilung wieder Ähnlichkeit mit dem Interferenzmuster vom dritten Experiment zu zeigen ! [vollkommene Übereinstimmung mit dem Interferenzmuster des dritten Experiments erhält man wenn die Wellenlänge sehr viel größer als der Abstand der Spalte ist]. Die Situation ist also ganz ähnlich wie beim letzten Versuch; die ursprüngliche Idee funktioniert nicht, stattdessen hat man genau wie oben eine Reziprozität zwischen der Genauigkeit der Ortsmessung und der Qualität des Interferenzmusters.

Diese Reziprozität wird als “Unbestimmtheit” bezeichnet. Sie ist auch durch beliebige andere Versuchsanordnungen (mit beliebigen Sonden anstelle von Licht) nicht zu eliminieren und ist das zentrale Kennzeichen der Quantenmechanik. Das Unbestimmtheitsprinzip der Quantenmechanik kann im Zusammenhang des Doppelspaltexperiments folgendermaßen formuliert werden:

Es ist unmöglich, einen Apparat zu entwickeln, mit dem man feststellen kann, durch welches Loch das Elektron geht, ohne daß gleichzeitig die Elektronen so weit gestört werden, daß das Interferenzbild zerstört wird.

Weder wurde je ein Gedankenexperiment erdacht, noch je ein reales Experiment ausgeführt, mit dem man diese Unbestimmtheit eliminieren kann (man kann das auch so ausdrücken: Es wurde niemals ein Experiment ausgedacht oder durchgeführt, das den Vorhersagen der Quantenmechanik widerspricht).

Bei den obigen Experimenten spielen die Eigenschaften des Lichtes, das als Sonde für die Ortsmessung verwendet wurde, eine ebenso große Rolle wie die Eigenschaften der zu untersuchenden Objekte, der Elektronen. Auch das Licht unterliegt der Unbestimmtheit bzw. den Gesetzen der Quantenmechanik. Das hat z.B. zur Folge, daß bei Verminderung der Lichtintensität Licht in diskreten Einheiten - Photonen - auftritt. Dies (Man spricht von der Welle-Teilchen-Dualität auch beim Licht) führt zu der oben besprochenen Tatsache, daß bei schwächer werdendem Licht manchmal Elektronen am Schirm ankommen, die keinen Lichtblitz auslösen (es war eben gerade kein Photon da).

Was kann man zu Behauptung A ("Jedes Elektron geht entweder durch Spalt 1 oder durch Spalt 2") im Lichte dieser Beobachtungen sagen? Wenn man "nachschauf" findet man, daß Behauptung A zutrifft. Was ist, wenn man nicht nachschaut? (Gerade dann, wenn man nicht nachschaut, sieht man das mysteriöse Interferenzmuster; die Frage ist also interessant). Antwort: Dann sollte man nichts darüber aussagen. wenn man in einem solchen Fall (wenn also überhaupt keine Störung der Elektronen stattfindet) auch die Richtigkeit von Behauptung A annimmt, kann es sein, daß man zu falschen Schlußfolgerungen kommt.

(5) Interferenzbild mit Kugeln (Fig.1-5 in [8])

Warum wurde bei den Kugeln beim ersten Experiment keine Interferenz

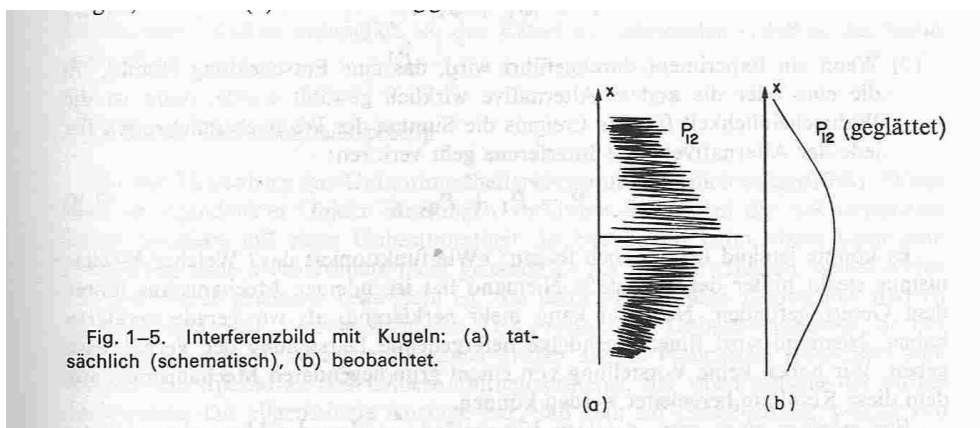
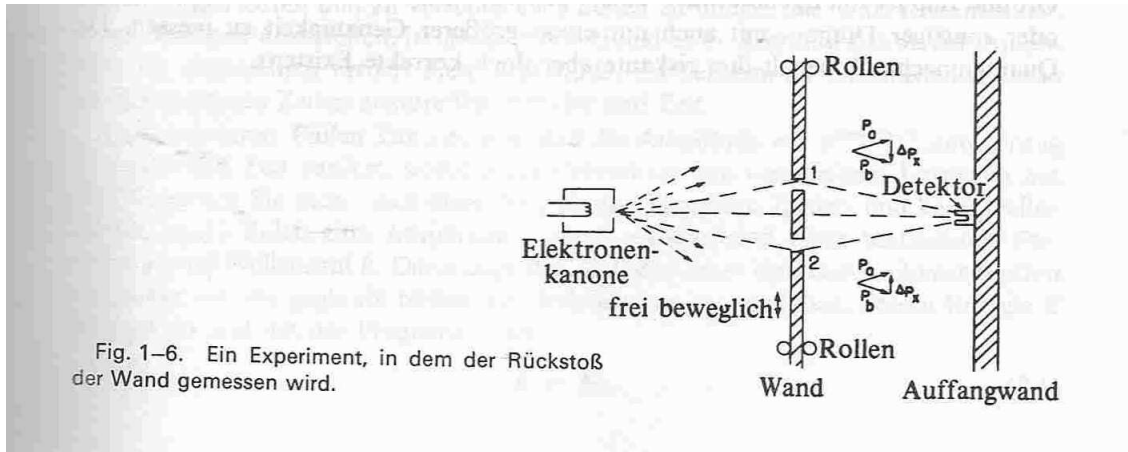


Fig. 1-5. Interferenzbild mit Kugeln: (a) tatsächlich (schematisch), (b) beobachtet.

beobachtet? Auch dies Experiment ist im Einklang mit dem Unbestimmtheitsprinzip. Allerdings zeigt sich, daß die Wellenlänge des Interferenzmusters auf Grund der makroskopischen Dimensionen der entsprechenden Anordnung so klein ist, daß sie nicht aufgelöst werden kann; das Interferenzmuster ist daher unsichtbar. Was man sieht - die Kurve  $P_{12}$  beim ersten Experiment - ist die Einhüllende der quantenmechanischen Kurve

(6) Der Rückstoß eines Elektrons (Fig.1-6 in [8])

Die Heisenberg'sche Unschärferelation besagt in der ursprünglichen For-



mulierung von Heisenberg folgendes: Wenn man die  $x$ -Komponente  $p$  des Impulses eines Elektrons mit einer Genauigkeit  $\Delta p$  mißt, dann kann die unmittelbar darauffolgende Messung der  $x$ -Komponente  $x$  des Ortes dieses Elektrons nur bestenfalls mit einer Genauigkeit  $\Delta x$ , erfolgen, die der Gleichung

$$\Delta x \Delta p = h$$

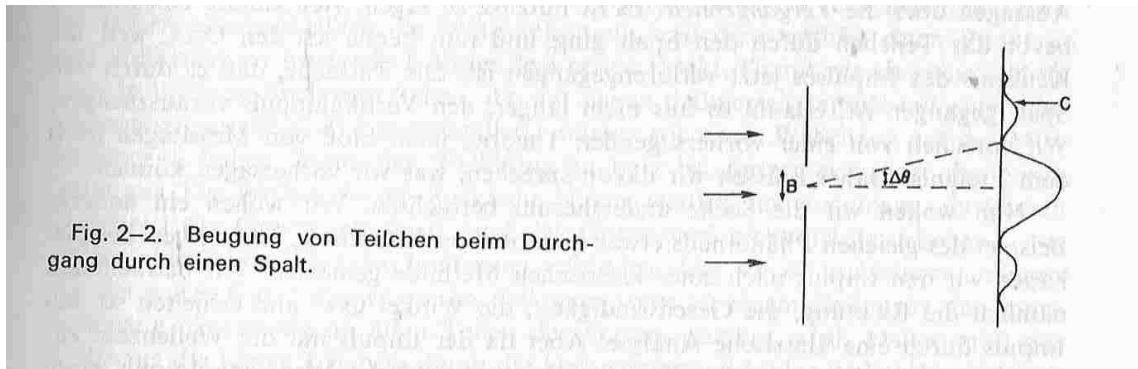
genügt (Die Zahl  $h = 6.6 \times 10^{-34}$  Nmsec hat die Dimension einer Wirkung). Feynman betrachtet die Heisenberg'sche Unschärferelation als Spezialfall der obigen allgemeinen Reziprozität, oder Unbestimmtheit, zwischen Ortsmessung und Ausbildung eines Interferenzmusters.

Das in Fig.1-6 gezeigte Gedankenexperiment zeigt, daß die Annahme, daß die Heisenberg'sche Unschärferelation nicht gilt, zu einem Widerspruch führt. Die Versuchsanordnung ist ähnlich wie beim Interferenzexperiment mit Elektronen (Fig.1-3) mit dem Unterschied, daß die Wand mit den Schlitzen vertikal, in  $x$ -Richtung, (auf Rollen, reibungsfrei) verschieblich sein soll. Wenn das Elektron durch den oberen Schlitz geht, wird die Platte nach oben laufen. Wenn das Elektron durch den unteren Schlitz geht, wird die Platte nach unten laufen. Durch Beobachten der Platten kann man also feststellen, durch welches Loch die Elektronen laufen, ohne diese im geringsten zu stören. Wenn die Störung der Elektronenbahn (bei der Beobachtung) die Ursache der Zerstörung des Interferenzmusters ist, dann hat man jetzt Grund zu der Annahme, daß das Interferenzmuster bestehen bleibt - trotz der Beobachtung (weil ja keine Störung stattgefunden hat). Dann hat man also die allgemeine Reziprozität, bzw. die Quantenmechanik selbst, überlistet. Das ist der Widerspruch [so verstehe ich diesen Abschnitt]. Der Fehler den man gemacht hat ist, daß man vergessen hat, auch für die Platte

die Gültigkeit der Unschärferelation zu fordern. Wenn man den Impuls der Platte genau mißt, kann man den Ort nicht mehr genau messen. Man kann dann im Endeffekt nicht mehr sagen, durch welches Loch das Elektron durchgegangen ist. Die Unschärferelation “schützt” die Quantenmechanik.

(7) Messung von Ort und Impuls (Fig.2-2 in [8])

Hier wird ein Gedankenexperiment an Hand der Beugung von Elektronen



am Spalt untersucht. [Es handelt sich also jetzt um einen einzigen Spalt. Es gibt aber hier genau wie beim Doppelspalt Interferenzphänomene. Auch hier werden natürlich, wie beim Doppelspalt, die Interferenzmuster durch ein Kollektiv von vielen (gleichzeitig oder hintereinander auftretenden) einzelnen Elektronen gebildet].

Teilchen (sagen wir: Elektronen) treffen auf den Spalt. Alle Elektronen fliegen in dieselbe Richtung, nämlich genau senkrecht zur Ebene des Spaltes. Wenn sie den Spalt durchdringen haben sie also alle dieselbe Horizontalkomponente  $p_0$  und eine verschwindende Vertikalkomponente  $p_y$  des Impulses (die vertikale Richtung soll die  $y$ -Richtung sein). Wenn ein Elektron durch den Spalt geflogen ist, ist sein Ort in  $y$ -Richtung bis auf eine Unschärfe der Größe  $B$  bekannt. D.h. die Unbestimmtheit  $\Delta y$  ist von der Ordnung  $B$ . Über die  $y$ -Komponente des Impulses wissen wir noch nichts. Die Tatsache, daß vor dem Durchfliegen des Spaltes  $p_y = 0$  galt, ist jetzt, nach dem Durchgang durch den Spalt und zugehöriger Beugung, nicht mehr verwendbar. Die Ortsbestimmung hat die frühere genaue Information über den Wert des Impulses zunichte gemacht. Im Wellenbild kann man sich aber eine Vorstellung über die ungefähre Größe von  $p_y$  (nach Durchgang durch den Spalt) machen: Man identifiziert die Position des ersten Minimums des Interferenzmusters mit der ungefähren Größe der Ablenkung in  $y$ -Richtung. Dann ist  $\Delta p_y \approx p_0 \Delta \theta$ , wo  $\Delta \theta$  der in Fig.2-2 eingezeichnete Winkel zum ersten Minimum ist. Dieser Winkel  $\Delta \theta$  ist etwa gleich  $\lambda/B$  und mit  $p_0 \lambda = h$  erhält man die Unschärferelation  $\Delta p_y \Delta y \approx h$ .

Aus diesem Gedankenexperiment wird die folgende Schlußfolgerung bezüglich der Interpretation der Unbestimmtheitsrelation gezogen: Durch die Tatsache, daß das Teilchen durch den Spalt geflogen ist, hat eine Ortsmessung mit der Unschärfe  $\Delta p_y = B$  stattgefunden. Durch diesen Messvorgang wird die darauffolgende Messung mit einer Unschärfe  $\Delta p_y$  (deren Wert durch die obige Unbestimmtheitsrelation bestimmt ist) versehen. Je genauer ich den Ort messe umso ungenauer wird eine zukünftige Messung des zugehörigen Impulses sein (und umgekehrt).

Die Interpretation und die philosophischen Konsequenzen die sich aus den Experimenten und deren Interpretation ergeben, werden von Feynman in einem eigenen Abschnitt (Abschnitt 2-6) besprochen (Die Grundzüge dieser Interpretation sind eigentlich schon in diesem Abschnitt - der eigentlich nur einer inhaltlichen Schilderung der Experimente gewidmet war - sichtbar geworden). Wegen ihrer Bedeutung für die anschließende Diskussion führe ich die wichtigsten Punkte zusammenfassend an:

- Eine Beobachtung beeinflusst eine Erscheinung. Die Art der Beeinflussung kommt im Unbestimmtheitsprinzip zum Ausdruck. Der Einfluß der Beobachtung kann prinzipiell nicht zum Verschwinden gebracht werden.
- Man sollte nicht über Dinge reden, die man nicht messen kann. Zum Beispiel hat es keinen Sinn über den genauen Impuls eines lokalisierten Teilchens zu sprechen, da er nicht gemessen werden kann. Allgemeiner formuliert: Man soll nur Konzepte verwenden, die einer experimentellen Prüfung zugänglich sind.
- Die Quantenmechanik ist indeterminiert in dem Sinn, daß man nicht mehr genau vorhersagen kann, was geschehen wird, bzw. was gemessen werden wird.

## 2 Analyse

Welche Schlußfolgerungen zieht Feynman aus den Beobachtungen (abgesehen von der Feststellung, daß alles sehr mysteriös ist, über die allgemeiner Konsens herrscht). Wenn man die Bemerkungen, die er während der Diskussion der späteren Experimente macht, zusammen mit den an Ende des letzten Abschnitts angeführten Punkten betrachtet, ergibt sich folgendes Bild:

Die Wellenfunktion beschreibt ein einzelnes Teilchen. Exakte Vorhersagen sind nicht möglich. Die Ursache für diesen Indeterminismus ist der Eingriff, der durch die Beobachtung (den Meßvorgang) erfolgt. Die Objekte der Mikrowelt sind weder als Teilchen noch als Wellen zu betrachten. Je nach dem, welche Versuchsanordnung vorliegt, wird entweder der eine oder der andere Standpunkt dominieren; die beiden Aspekte verhalten sich komplementär. Obwohl die Vorher-

sage von eindeutigen Meßresultaten nicht möglich ist, ist die Theorie doch vollständig. Dies kommt daher, weil es keinen Sinn hat, Fragen zu stellen, die man (experimentell) nicht beantworten kann.

Diese Interpretation der Wellenfunktion, bzw. der Quantenmechanik stimmt ziemlich genau mit der von Bohr propagierten Interpretation überein, die als Kopenhagener Interpretation (KI) oder orthodoxe Interpretation bezeichnet wird. Es ist dies - wie die Bezeichnung orthodox vermuten läßt - die am weitesten verbreitete Interpretation. Es gibt verschiedene Varianten der KI, allen gemeinsam ist eine wesentliche Rolle des Beobachters am Zustandekommen des Meßresultats (bis hin zu: "Observations not only disturb what is to be measured, they produce it"), damit zusammenhängend eine sozusagen virtuelle Existenz des einzelnen "Objekts", und die Behauptung, daß die Quantenmechanik eine vollständige Beschreibung *eines einzelnen Teilchens* ermöglicht, wobei "vollständig" so zu verstehen ist, daß es prinzipiell unmöglich ist, genauere Aussagen zu machen.

Wir wollen die Entstehung der Feynmann'schen Interpretation, die mit der orthodoxen Interpretation übereinstimmt (doch das allein ist ja noch kein Beweis für ihre Richtigkeit) im Detail nachvollziehen und, in engem Kontakt mit den von Feynman so klar geschilderten experimentellen Tatsachen, analysieren.

Eine erste wichtige Aussage hierzu wird von Feynman bei der Diskussion des Elektronenstreuexperimentes (Fig.1-3), das eine Art "Schlüsselexperiment" darstellt, gemacht:

"Die Elektronen kommen als Klumpen an, wie Teilchen, und die Ankunfts-wahrscheinlichkeit dieser Klumpen ist verteilt wie die Intensität einer Welle. Es ist in diesem Sinne zu verstehen, daß sich ein Elektron manchmal wie ein Teilchen und manchmal wie eine Welle verhält"

Das ist eine vollkommen klare Beschreibung dessen was beobachtet wird. Bei allen Einzelereignissen werden Teilcheneigenschaften beobachtet. Das Resultat des Einzelereignisses (hier also der Ort des Auftreffens) ist nicht bekannt. Der Wellencharakter kommt durch das statistische Zusammenspiel vieler Einzelereignisse zustande.

Eine zweite wichtige Aussage zur Interpretation macht Feynman als Zusammenfassung der Diskussion von Experimenten vom Typ von Fig.1-4 (wo die Komplementarität zwischen Ortsmessung und Interferenzbildung zu Tage tritt). Seine abschließende Antwort auf die Behauptung A ("Jedes Elektron geht entweder durch Spalt 1 oder durch Spalt 2") ist:

"Wenn man ein Gerät hat, das in der Lage ist, festzustellen, ob die Elektronen durch Loch 1 oder Loch 2 gehen, dann *kann* man sagen, daß sie entweder durch Loch 1 oder Loch 2 gehen. *Aber* wenn man sich *nicht* um eine Aussage über den Weg der Elektronen bemüht . . . , dann darf man *nicht* sagen, daß ein Elektron entweder durch Loch 1 oder Loch 2 geht"

Dieser Satz ist mysteriös und steht in eklatantem Widerspruch zu der bisheri-

gen nüchternen und präzisen Darstellung Feynmans. Er deutet allen Ernstes an, daß das einzelne Elektron sich während des “Wegschauns” des Beobachters wie eine Welle verhalten könnte. Wohlgemerkt: Wir sprechen von dem *einzelnen* Elektron. Die experimentell beobachtete Interferenzstruktur ist immer das Resultat der Überlagerung (sehr) vieler Einzelereignisse. Wenn das Teilchen ohne “Hinschaun” des Beobachters zur Welle wird, dann muß das auf seinem Weg durch den Doppelspalt geschehen (weil er nur dann “wegschaut”). Es muß sich dann aber vor seiner Ankunft am Auffangschirm wieder in ein Teilchen zurückverwandeln: auf dem Schirm trifft es ja wieder als Teilchen auf, wie das Klicken des Geigerzählers zeigt. Wir erinnern uns, daß das Interferenzmuster auch dann auftritt, wenn zu jedem Zeitpunkt nur *ein* Elektron unterwegs ist. Wir wollen das Experiment genau so durchführen. Wir nehmen also an, daß zu jedem Zeitpunkt nur ein Elektron unterwegs ist, wie man durch die zeitliche Abfolge einzelner (gleich lauter) Klicks feststellen kann. Dieser Spezialfall ist besonders übersichtlich, und bietet sich also zur ersten Überprüfung der Feynmansche Erklärung an. Die experimentelle Realität ist - um es noch einmal zu wiederholen - daß bei jedem Auftreffen eines Elektrons auf dem Schirm ein Klicken zu hören ist, und die Gesamtheit der auftreffenden Elektronen nach genügend langer Zeit ein Interferenzmuster bildet. Welchen Sinn hat es, dem einzelnen, durch jeden Klick klar definierten Teilchenereignis Welleneigenschaften zuzuschreiben ?. So mysteriös auch immer das Interferenzmuster sein mag, das vom Kollektiv gebildet wird, man wird es nicht dadurch erklären können, daß man eine experimentell nicht abgesicherte Hypothese aufstellt. Es gibt keinen Grund, dem einzelnen Elektron die Eigenschaften eines Kollektivs zuzuschreiben.

Die Hypothese des Welle-Teilchen Dualismus, die in dem oben zitierten Satz eigentlich nur angedeutet wird, wird im Laufe der weiteren Diskussion [8] zunächst stillschweigend und dann definitiv übernommen. Sie besteht eigentlich aus zwei Hypothesen. Die erste ist, daß das Teilchen - oder besser gesagt das Objekt - ein Doppelleben als Teilchen und Welle führt. Der Wellencharakter (der vom Experiment her - um es nochmals zu betonen - eine Eigenschaft eines Kollektivs ist) wird als Eigenschaft, bzw mögliche Daseinsform, des einzelnen Objekts deklariert. Die zweite Hypothese ist, daß der Beobachter bei dieser mystischen Transformation von Teilchen zu Welle oder umgekehrt, offenbar (durch sein “Hinschaun” oder “Wegschaun”) eine entscheidende Rolle spielt. Mit dieser zweiten Hypothese wird die bisherige, für die naturwissenschaftliche Methode so fundamentale Trennung zwischen dem Beobachter und dem Objekt, das zu beobachten ist, aufgehoben.

Die verbleibenden drei Experimente, die im letzten Abschnitt diskutiert wurden, sind bezeichnenderweise ausnahmslos Gedankenexperimente. Fig.1-5 (Interferenzbild mit Kugeln) ist im Moment nicht von zentraler Bedeutung. Es wurde der Vollständigkeit halber angeführt und wir können es hier übergehen.

Fig.1-6 (Der Rückstoß eines Elektrons) ist ein Gedankenexperiment, das zeigen soll, daß die Ungültigkeit der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation zum Zusammenbrechen der Quantenmechanik führt. Die Logik dieses Abschnitts scheint

etwas zirkulär zu sein, da vorher schon die Unbestimmtheit als zentrales Kennzeichen aller quantenmechanischen Vorgänge definiert wurde. Das ist aber nicht der Punkt. Der Punkt ist, wie die Unbestimmtheit verwendet wird. Sie wird in der von Heisenberg eingeführten Form verwendet, nämlich als Eigenschaft von Teilchen. Im vierten Experiment (Beobachtung der Elektronen, Fig.1-4) war *tatsächlich* eine Unschärfe sowohl hinsichtlich der Genauigkeit der Ortsmessung als auch bezüglich der Qualität des Interferenzmusters zu sehen. Man kann zur mathematischen Beschreibung der Resultate dieser Experimente auch Größen  $\Delta x$  und  $\Delta p$  einführen. Diese Größen (Unschärfen) beschreiben aber die experimentell beobachtete Abweichung vom Mittelwert bei Beobachtung einer großen Zahl von Einzelereignissen, beziehen sich also auf ein *Kollektiv* und nicht auf ein einzelnes Teilchen. Es gab bis jetzt kein reales Experiment (d.h. Nicht-Gedankenexperiment) in dem den Symbolen  $\Delta x$  und  $\Delta p$  eine operativ sinnvolle Bedeutung im Zusammenhang mit *Messungen* (vergl. jedoch später den Begriff der Präparation) an einzelnen Teilchen zugeordnet wurde (beim dem im nächsten Absatz kurz diskutierten Gedankenexperiment von Fig.2-2 fand eine Vermengung von Einteilchen- und Vielteilcheneigenschaften statt). Die von Heisenberg eingeführte Vermengung, bzw. Vertauschung von Eigenschaften von einzelnen Objekten mit Eigenschaften von statistischen Gesamtheiten wird also von Feynman auch hier (wie schon oben) übernommen.

Genau dieselbe Situation liegt auch beim letzten Experiment (Messung von Ort und Impuls, Fig.2-2) vor. Hier wird die Welleneigenschaft einzelner Objekte bereits als selbstverständlich vorausgesetzt. Die Unschärfen in Ort und Impuls (des einzelnen Teilchens) werden durch den Messvorgang in Beziehung zueinander gebracht und die Komplementarität dieser beiden Eigenschaften kommt ins Spiel.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die von Feynman übernommene (Kopenhagener) Interpretation der Quantenmechanik Annahmen enthält, die im Experiment nicht beobachtet werden. Seine präzise Schilderung der vier realen Experimente (Fig.1-1 bis Fig.1-4) erlaubt es nicht, die nachfolgende Interpretation zu akzeptieren.

Nichts von dem was in diesem Abschnitt gesagt wurde ist neu. Eine große Zahl von Physikern ist in den vergangenen achtzig Jahren zu dieser, oder einer ähnlichen Schlußfolgerung gelangt. Es scheint unmöglich zu sein, die Unzulänglichkeit der KI bei einer einigermaßen sorgfältigen Analyse der Experimente nicht zu erkennen. Überraschenderweise bildet diese große Zahl von Physikern aber nur einen kleinen Bruchteil der Gesamtheit aller Physiker. Die Mehrheit zieht - soweit die Frage überhaupt betrachtet wird - die KI vor. Im nächsten Kapitel werden wir eine zur KI alternative Interpretation der Quantenmechanik untersuchen.



### 3 Die statistische Interpretation

Angenommen, man verzichtet auf die fragwürdige Annahme, daß die einzelnen Objekte bei Nichtbeobachtung (bei Bedarf) Wellencharakter annehmen können. Gibt es auch ohne diese Annahme eine sinnvolle Interpretation für den quantenmechanischen Formalismus? Auf der Suche nach einer solchen Interpretation sollte man versuchen, die experimentelle Situation und nur diese - ohne irgendwelche zusätzliche Annahmen, die keine direkte Entsprechung in der experimentellen Realität haben - als Basis zu verwenden.

Als eine solche Basis kann man die (schon oben zitierte) Zusammenfassung Feynmann's des dritten Experiments (Elektronenstreuexperiment, Fig.1-3),

“Die Elektronen kommen als Klumpen an, wie Teilchen, und die Ankunfts-wahrscheinlichkeit dieser Klumpen ist verteilt wie die Intensität einer Welle. Es ist in diesem Sinne zu verstehen, daß sich ein Elektron manchmal wie ein Teilchen und manchmal wie eine Welle verhält”,

betrachten. Die Einzelereignisse sind regellos, nicht vorhersagbar. Eine klar definierte Struktur - das Interferenzmuster- bildet sich erst durch Überlagerung von vielen Einzelereignissen.

Es spricht prinzipiell nichts dagegen, eine Interpretation der Quantentheorie aufzustellen, die genau dieser experimentellen Situation entspricht. In dieser “Minimalinterpretation” kann man also Einzelereignisse nicht vorhersagen. Es gibt nur Wahrscheinlichkeitsaussagen. Diese Wahrscheinlichkeitsaussagen können naturgemäß nur durch Vergleich mit (sehr) vielen Einzelereignissen überprüft werden. Das ist zwar genau das was im Experiment beobachtet wird (eine klare Struktur, nämlich das Interferenzmuster, entsteht erst durch viele einzelne Ereignisse), aber es gibt einen Punkt der wirklich schwer zu verdauen ist. Das ist die Tatsache, daß die Quantentheorie - in dieser Interpretation - keine vollständige Beschreibung der Natur liefert; für einzelne Ereignisse können ja wie gesagt keine Vorhersagen gemacht werden. Die Vorhersagen der Theorie haben statistischen Charakter, daher wird diese Interpretation von einigen Autoren [2] auch als “statistische Interpretation” (SI) der Quantenmechanik bezeichnet (Achtung: dieser Ausdruck ist zwar inhaltlich sehr treffend, wird aber nicht von allen Autoren in diesem Sinn verwendet). Unter den bekannteren Vertretern der SI sind die Physiker Einstein, Landé, Blokhintsev, Ballentine und der Philosoph Popper, um nur einige zu nennen.

Im Rahmen der SI der Quantenmechanik ist das Verhalten eines einzelnen Systems nicht vorhersagbar. Die Tatsache, daß man für die zu erwartenden Meßgrößen Wahrscheinlichkeiten angeben kann, ist für die Vorhersage eines konkreten Einzelereignisses weitgehend bedeutungslos. Im Rahmen der KI ist das Verhalten eines einzelnen Systems ebenfalls nicht vorhersagbar. Wo liegt der Unterschied ?

In der SI ist die Unvorhersagbarkeit ein fundamentales - und unerklärtes - Fak-

tum, mit dem man sich abzufinden hat. Die Neuorientierung die unserem Denken (und unserem Selbstbewußtsein) durch diese Einschränkung abverlangt wird, ist beträchlich. Es gibt auch andere Einschränkungen, die ebenfalls zu einer Neuorientierung führen, wie z.B. die Tatsache, daß es eine Maximalgeschwindigkeit für die Ausbreitung von Signalen gibt. Dieser Aspekt wurde von Landé [10] ausführlich diskutiert. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und die daraus folgenden revolutionären Konsequenzen der speziellen Relativitätstheorie sind aber insgesamt noch leichter zu akzeptieren, als die Erkenntnis, daß die Natur es vorzieht, uns über das Verhalten von Einzelereignissen prinzipiell im Unklaren zu lassen.

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist uns an und für sich - im täglichen Leben ebenso wie in der Physik - wohlvertraut. Was ist der Unterschied zwischen diesem vertrauten Wahrscheinlichkeitsbegriff der klassischen Physik und dem der Quantenmechanik ? Beim klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff (der Physik) kann man zwar auch Einzelergebnisse nicht (genau) vorhersagen, man kann aber die Genauigkeit der Vorhersagen durch Verbesserung der experimentellen Bedingungen schrittweise verbessern. Das Ziel absolut genauer Vorhersagen kann selbstverständlich nie wirklich erreicht werden. Das macht aber nichts, genauer gesagt, wir *nehmen* in der klassischen Physik *an*, daß es für die Erhöhung dieser Genauigkeit keine Schranken gibt. Diese Annahme ist in unserem Denken tief verwurzelt. Die Differenz zwischen dem tatsächlichen Resultat eines Experiments und der theoretischen Vorhersage (die immer von Null verschieden ist) wird damit erklärt, daß eben nicht alle Aspekte, die einen Einfluß auf das Resultat hatten, berücksichtigt werden konnten. Diese Position kommt in dem folgenden Satz von Laplace [5] zum Ausdruck:

All events, even those which on account of their insignificance do not seem to follow the great laws of nature, are a result of it just as necessarily as the revolution of the sun.

Diese Annahme ist eigentlich eine Idealisierung. Und zwar eine unzulässige, wenn man die Quantenmechanik im statistischen Sinn interpretiert.

Vom Standpunkt der KI aus gesehen, ist die Unvorhersagbarkeit eine Konsequenz des Meßvorgangs. Der Meßvorgang beeinflusst das zu untersuchende System auf ungeklärte Weise; so daß das Resultat nicht vorhersehbar ist. Der Meßvorgang legt auch fest, wieweit der Teilchen- oder Wellencharakter des einzelnen Systems bei dem konkreten Experiment zum Durchbruch kommt. Die Unvorhersagbarkeit ist kein Faktum, mit dem man sich abfinden muß, sondern sie geht auf unsere Unfähigkeit zurück, die Art und Weise zu durchschauen, wie die Beeinflußung des Systems durch den Meßvorgang genau aussieht. Dadurch wird die Unvorhersagbarkeit ein fundamentales und schwieriges Problem der Physik, nämlich das "measurement problem". In der KI beschreibt die Schrödingergleichung die Zeitentwicklung eines einzelnen Systems. Neben dieser "unitären" Zeitentwicklung, die man durch Lösen der Schrödingergleichung ermitteln kann, gibt

es in der KI noch eine zweite, nicht-unitäre “Zeitentwicklung”, die während des Meßprozesses stattfindet, und häufig als “Reduktion des Wellenpackets” bezeichnet wird.

Vom Standpunkt der SI aus gesehen ist das Meßproblem ein Scheinproblem. Der erste und wichtigste Vertreter der SI war Einstein. Er war auch der (als Vermutung formulierten) Meinung, daß die Quantenmechanik früher oder später durch eine vollständige(re) Theorie abgelöst werden würde. Es ist wichtig festzuhalten, daß diese beiden Positionen sich nicht wechselseitig bedingen; die SI kann “richtig” sein (soweit man einer Interpretation Wahrheit zuschreiben kann - ich glaube aber man sollte das im Fall der Quantenmechanik tun) auch wenn die Quantenmechanik der Weisheit letzter Schluß sein sollte. In der Meinung der physikalischen Öffentlichkeit wurden die beiden Positionen leider miteinander verknüpft. Der Siegeszug der Quantenmechanik führte damit mehr oder minder automatisch zur Vorherrschaft der KI. Dementsprechend wurde in den letzten achzig Jahren enorme Anstrengungen unternommen um das “measurement problem” zu lösen (man werfe um einen Eindruck zu bekommen, einen Blick in das Literaturverzeichnis des Kompendiums von Auletta [1]). Es scheint schwer vorstellbar, daß all diese Aktivität einem Scheinproblem galt. Andererseits gibt es keine Erfolge, das Meßproblem ist so ungelöst wie am ersten Tag.

Die SI ist sowohl revolutionärer als auch einfacher als die KI. Sie besagt, daß man auf den Determinismus in der Beschreibung der Natur prinzipiell verzichten muß (ohne eine Erklärung dafür anzubieten). Diese Position ist radikaler als die der KI. In der KI liefert die Quantenmechanik nach wie vor eine “vollständige” Beschreibung des Verhaltens eines einzelnen Systems; wir können nur nicht angeben, wie diese aussieht - weil wir das Meßproblem noch nicht gelöst haben. In der SI bleiben Teilchen im Prinzip Teilchen und Wellen bleiben Wellen (wobei man natürlich bei beiden Begriffen in Bezug auf konkrete Vorhersagen enorme Unterschiede zur klassischen Physik in Kauf zu nehmen hat). In der KI verschwimmen die Begriffe Teilchen und Wellen. Es gibt auch nach wie vor einen Determinismus, aber (siehe oben) sozusagen einen virtuellen. Die SI ist da im Vergleich weitaus einfacher. Mit ihrem simplen und expliziten Verzicht auf den Determinismus kann sie sich nicht vergleichen mit Bohr’s geistreichem Versuch, beim Übergang zur Quantenmechanik auf *keine* der drei Säulen der klassischen Physik - als da sind (1) der Teilchenbegriff, (2) der Wellenbegriff, (3) der Begriff des Determinismus - ganz zu verzichten.

## 4 Das EPR Experiment

Die Annahme daß ein quantenmechanischer Zustand eine vollständige Beschreibung eines einzelnen Elektrons, oder allgemeiner irgendeines einzelnen Systems, darstellt wurde von Einstein Podolsky und Rosen (EPR) in einer berühmten Arbeit [7] bezweifelt. In diesem Kapitel gebe ich die Zusammenfassung dieser Arbeit

in dem Review Artikel von Ballentine [2] wieder.

In dem Artikel werden zwei Definitionen eingeführt:

- D1 Die erste Definition legt fest, was man unter einer vollständigen physikalischen Theorie zu verstehen hat. Es wird eine notwendige Bedingung hierfür formuliert. Die erste Definition hat also die formale Struktur

$$T \text{ ist eine vollständige physikalische Theorie} \rightarrow C$$

Die Aussage C, die also eine notwendige Bedingung für die Existenz der vollständigen physikalischen Theorie T ist, hat selbst die Form einer Implikation, also

$$C \text{ ist die Aussage: } A \rightarrow B$$

wobei die Aussagen A und B definiert sind durch:

- A: X ist ein Element der physikalischen Realität
- B: Es gibt ein Gegenstück zu X in T

Die Aussage C (*condition of completeness*) bedeutet kurz gesagt (Originaltext): *every element of physical reality must have a counterpart in the physical theory.*

- D2 Die zweite Definition legt fest, was man unter einem Element der Realität zu verstehen hat. Es wird eine hinreichende Bedingung hierfür formuliert. Die Definition hat also die formale Struktur

$D \rightarrow E$  ist ein Element der physikalischen Realität (das der Größe Y entspricht)

Die Aussage D, die also eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß E ein Element der Realität ist, lautet:

- E: Der Wert einer physikalischen Größe Y kann ohne jede Störung des Systems mit Gewißheit (mit Wahrscheinlichkeit 1) vorhergesagt werden.

Die Definition D2 bedeutet kurz gesagt (Originaltext): *If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e. with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity.*

Dazu sollte man zwei Bemerkungen machen. Die erste ist, daß D1 und D2 Definitionen sind und als solche, weder wahr oder falsch sein können; sie haben den Charakter von Festlegungen oder Verabredungen. Man kann sie aber trotzdem unter Umständen nicht akzeptieren, weil man z.B. der Ansicht ist, daß sie durch andere, zweckmäßigere ersetzt werden sollten. Die zweite Bemerkung ist, daß man mit der Einführung der in diesen Definitionen vorkommenden Begriffe (Element

der Realität, etc.), den *formalen Rahmen* der Quantentheorie verlassen hat. Man bewegt sich vielmehr in dem Grenzbereich zwischen Formalismus und Realität, d.h. in dem Grenzbereich bzw. Graubereich, der der *Interpretation* zuzuordnen ist. Das ist ja auch genau der Bereich über den die Autoren Aussagen machen wollen.

Ganz allgemein gesprochen wird von den Autoren nun der Formalismus der Quantentheorie (auf ein speziell geeignetes Problem) angewendet und aus dem Resultat werden unter Verwendung der obigen beiden Definitionen Schlußfolgerungen gezogen. Diese Schlußfolgerungen beziehen sich auf die Interpretation des Formalismus. Wenn Einstein, Podolsky und Rosen den Formalismus der Quantentheorie richtig angewendet haben, und davon kann man ausgehen, dann ist auch das Resultat "richtig" - *wenn* man die obigen Definitionen akzeptiert. Mit anderen Worten, die einzige Möglichkeit die EPR Schlußfolgerungen anzuzweifeln, besteht darin, die Zweckmäßigkeit von D1, und D2 anzuzweifeln.

Auf Grund dieser Situation gibt es keine Möglichkeit, die Schlußfolgerungen der Autoren experimentell zu widerlegen; diese beziehen sich ja auf die Interpretation des Formalismus und diese Interpretation kann experimentell weder verifiziert oder widerlegt werden. Eine Nichtübereinstimmung der Vorhersagen, würde vielmehr bedeuten, daß der Formalismus der Quantentheorie selbst falsch oder erweiterungsbedürftig ist.

Die Schlußfolgerung der EPR Arbeit in ihrer klarsten (von technischen Details befreiten) Form wurde von Einstein selbst in einer späteren Arbeit [6]) formuliert. Sie lautet (ich verwende die etwas ausführlichere Formulierung von Ballentine [2]):

The following two statements are incompatible:

- (1) The state vector provides a complete and exhaustive description of an individual system
- (2) The real physical conditions of spatially separated (noninteracting) objects are independent.

Diese Schlußfolgerung betrifft wie angekündigt die Interpretation. Sie sagt nichts darüber aus, welche Interpretation "richtig" ist (das ist genaugenommen niemals möglich), aber sie gibt eine Alternative an: Wenn man die Annahme, daß der Zustandsvektor eine vollständige Beschreibung darstellt, beibehalten will, muß man sehr exotische - um nicht zu sagen absurde - Eigenschaften der mikroskopischen Realität in Kauf nehmen. Wenn man sich für die andere Alternative entscheidet und annimmt, daß beliebig weit voneinander entfernte Objekte auch beliebig wenig Einfluß aufeinander ausüben können, dann muß man auf die Vollständigkeit der Beschreibung verzichten und mit statistischen Aussagen vorliebnehmen.

Das EPR Gedankenexperiment enthält im Grunde dieselbe Schlußfolgerung, zu der man schon bei der sorgfältigen Betrachtung des Doppelspaltexperiments kommen konnte. Es werden aber die logischen Konsequenzen der Kopenhagener

Interpretation explizit sichtbar. Auf die Tatsache, daß das EPR Gedankenexperiment bei geeigneter (statistischer) Interpretation widerspruchsfrei ist, hat Margenau hingewiesen [12].

Heute wird das EPR Experiment meist im Zusammenhang mit den Bell'schen Ungleichungen diskutiert. Dieser Aspekt soll hier nur ganz kurz behandelt werden. Es gibt eine fundamentale Annahme (gewissermaßen des gesunden Menschenverstandes) die etwa besagt, daß Messungen an weit voneinander entfernten (wechselwirkungsfreien) Objekten, einander nicht beeinflussen können. Diese Annahme wurde von Einstein ins Treffen geführt, und wird als Lokalisierungspostulat bezeichnet. Bell betrachtete Korrelationen zwischen Messungen an weit voneinander entfernten Systemen vom EPR Typ und leitete aus dem Lokalisierungspostulat eine sehr allgemeine Ungleichung ab. Die Quantenmechanik ist *nicht* in Übereinstimmung mit dieser Ungleichung, verletzt also das Lokalisierungspostulat. Dieser Problemkreis betrifft nicht die Frage der Vollständigkeit der quantenmechanischen Beschreibung von einzelnen Systemen, sondern Korrelationen zwischen statistisch ermittelten Daten. Es handelt sich also um eines der realen quantenmechanischen Rätsel, das auch in der statistischen Interpretation auftritt; in der Tat verstehen wir ja auch im Rahmen der statistischen Interpretation nicht wirklich (intuitiv), wie oder warum die vielen Teilchen beim Doppelspaltexperiment das beobachtete Interferenzmuster bilden. Die Bell'sche Ungleichung ist eine mathematische Aussage die es erlaubt, dieses quantenmechanische Rätsel quantitativ zu erfassen. Die Analyse der meisten Autoren [4] führt zu der wichtigen Schlußfolgerung, daß es keine ("hidden variables") Theorie geben kann, die die Quantenmechanik "vervollständigt". Mit anderen Worten: die Suche nach einer Theorie, die sich zu Quantenmechanik so verhält, wie die Mechanik zur Statistischen Thermodynamik ist vergeblich [3].

## 5 Das Unbestimmtheitsprinzip

Betrachten wir eine Observable  $A$ . In einem gegebenen Zustand  $|\psi\rangle$  kann man den Erwartungswert  $\langle A \rangle$  und die Standardabweichung  $\Delta A$  berechnen ( $\Delta A$  ist definiert als die Wurzel aus dem Mittelwert des Quadrats der Abweichung von  $A$  vom Erwartungswert). Für nicht-kommutierende Operatoren, insbesondere für zwei kanonisch konjugierte Variable wie z.B.  $q$  und  $p$ , kann man aus dem mathematischen Formalismus der Quantentheorie ein Resultat der Form

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3)$$

ableiten. Der traditionelle Name für diese Ungleichung lautet Unschärferelation, sie ist aber auf Grund ihrer Definition ein statistisches Gesetz und man sollte statt dessen besser "statistical dispersion principle" sagen [2].

Diese Ungleichung entspricht im Rahmen der SI genau dem (statistischen)

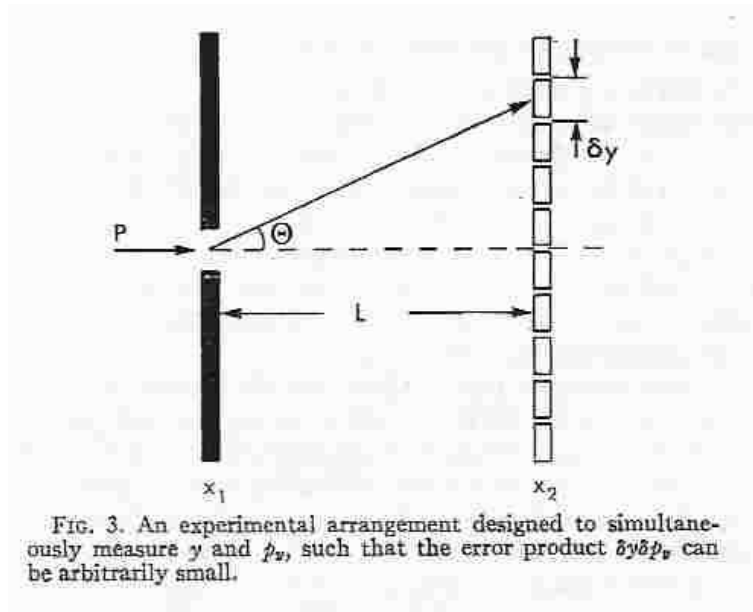
Resultat des Experiments, das in Fig.1-4 gezeigt ist, und im vierten Punkt des ersten Kapitels ausführlich diskutiert wurde. Die Standardabweichung  $\Delta p$  ist ein Maß für die Qualität des Interferenzmusters; je kleiner  $\Delta p$  ist, umso besser ist das Interferenzmuster. Die Standardabweichung  $\Delta x$  ist ein Maß für die Qualität der Ortsmessung (die Treffsicherheit bei der Zuordnung der Teilchen zu den Spalten); je kleiner  $\Delta x$  ist, umso genauer wurden die Teilchen lokalisiert. Um jede der beiden Größen,  $\Delta x$  und  $\Delta p$ , experimentell zu ermitteln ist eine große Zahl von einzelnen Experimenten (natürlich alle mit identischen Versuchsanordnungen) durchzuführen. Die Größen  $\Delta x$  und  $\Delta p$  beschreiben also nicht die Eigenschaften einzelner Teilchen sondern beziehen sich auf statistische Eigenschaften vieler Teilchen. Da  $\Delta x$  und  $\Delta p$  sich nicht auf Messungen an einzelnen Teilchen beziehen, können sie insbesondere auch nicht *simultane* Messungen an einzelnen Teilchen beschreiben. Es kann selbstverständlich bei der Messung von Ort und Impuls eines einzelnen Teilchens auch Unbestimmtheiten geben; sie sollen mit  $\delta x$  und  $\delta p$  bezeichnet werden. Kann man etwas über das wechselseitige Verhältnis von  $\delta x$  und  $\Delta x$  (oder von  $\delta p$  und  $\Delta p$ ) aussagen? Die Größen  $\delta x$  und  $\delta p$  treten im quantenmechanischen Formalismus nicht auf; Die Zahlenwerte (Eigenwerte) die den quantenmechanischen Observablen (Operatoren) als mögliche Meßwerte zugeordnet werden, sind theoretisch exakt messbar. Es gibt im Formalismus hier keine Einschränkungen bezüglich der Genauigkeit (man beachte, daß dies alles Messungen *einer* Observablen betrifft). Die Größen  $\delta x$  und  $\delta p$  nehmen also im quantenmechanischen Formalismus die Zahlenwerte Null an. Experimentell müssen die Ungenauigkeiten der einzelnen Messungen ebenfalls klein sein, damit man einen sinnvollen Mittelwert definieren kann; es muß also jedenfalls  $\delta x \ll \Delta x$  ( $\delta p \ll \Delta p$ , etc) gelten. Zusammenfassend kann man sagen, daß die obige Relation im Rahmen der SI keine Aussagen, über Messungen von  $x$  und  $p$  an einzelnen Systemen macht, insbesondere keine Aussagen über Unschärfen bei der (gleichzeitigen) Messung von  $x$  und  $p$  an einem System.

Im Rahmen der KI wird der obigen Relation sehr wohl eine Bedeutung im Zusammenhang mit Messungen an einzelnen Teilchen zugeordnet; die Relation wird dann meist als Heisenberg'sche Unschärferelation bezeichnet. Die Größen  $\Delta x$  und  $\Delta p$  werden als Unschärfen der Orts- und Impulsmessung eines einzelnen Teilchens interpretiert, und zwar als Unschärfen bei der "gleichzeitigen" Messung von  $x$  und  $p$ . Die Ursache hierfür wird meist im wesentlichen (es gibt mehrere Varianten) dem Meßvorgang zugeschrieben:

Eine Messung des Ortes  $q$  bewirkt eine unkontrollierbare und unvorhersehbare Störung des Impulses  $p$  und umgekehrt (Heisenberg).

Bei der Untersuchung des Doppelspaltexperiments im ersten Kapitel wurde diese Interpretation bereits diskutiert (und kritisiert). Wir wollen sie hier noch einmal genauer betrachten; schließlich kann sie richtig sein, auch wenn sie nicht aus dem Formalismus der Quantentheorie abgeleitet werden kann.

Die obige Behauptung (Heisenberg) ist nicht immer richtig. Man sieht das an folgendem einfachen Beispiel [2], wo Ort und Impuls simultan mit beliebig kleiner Ungenauigkeit gemessen werden können. Betrachten wir Fig. 3 in Bal-



entine [2]. Ein Teilchen trifft mit Impuls  $p = p_x, p_y = 0$  auf einen Spalt auf. Infolge von Beugungseffekten wird das Teilchen beim Durchgang durch den Spalt von seiner Bahn abgelenkt. Es bekommt einen endlichen Impuls in  $y$ -Richtung, seine Energie bleibt unverändert. Beim Auftreffen auf einen Schirm, der sich im Abstand  $L$  vom Spalt befindet, wird der Ort  $y$  gemessen, u. zwar mit einer Genauigkeit  $\delta y$ . Dasselbe Ereignis mißt aber auch den Impuls  $p_y$ , den man aus Betrag  $p$  und dem Ablenkwinkel  $\Theta$  mit Hilfe der Relation  $p_y = p \sin \theta$  erhält. Es gibt bei diesem Experiment keine durch  $\hbar$  - gemäß der Heisenberg'schen Unschärferelation - bestimmte untere Schranke für das Produkt der Genauigkeiten  $\delta y$  und  $\delta p_y$ . Der Einwand, den man gegen diese Art der Messung machen kann ist, daß der Impuls nicht wirklich gemessen, sondern, unter der Annahme daß gewisse physikalische Gesetzmäßigkeiten gelten, erschlossen - d.h. eigentlich *definiert* wurde. Der Einwand ist nur auf den ersten Blick beunruhigend; tatsächlich macht man ja eigentlich bei *jeder* Messung irgendwelche Annahmen bzw. setzt die Gültigkeit irgendwelcher physikalischer Gesetzmäßigkeiten voraus (insbesondere wird bei Streuexperimenten routinemäßig aus Ortsmessungen unter Zuhilfenahme geometrischer Fakten auf den Impuls geschlossen).

Im Zusammenhang mit der gerade diskutierten Frage sollte man genauer untersuchen, was bei einer Messung vorgeht.

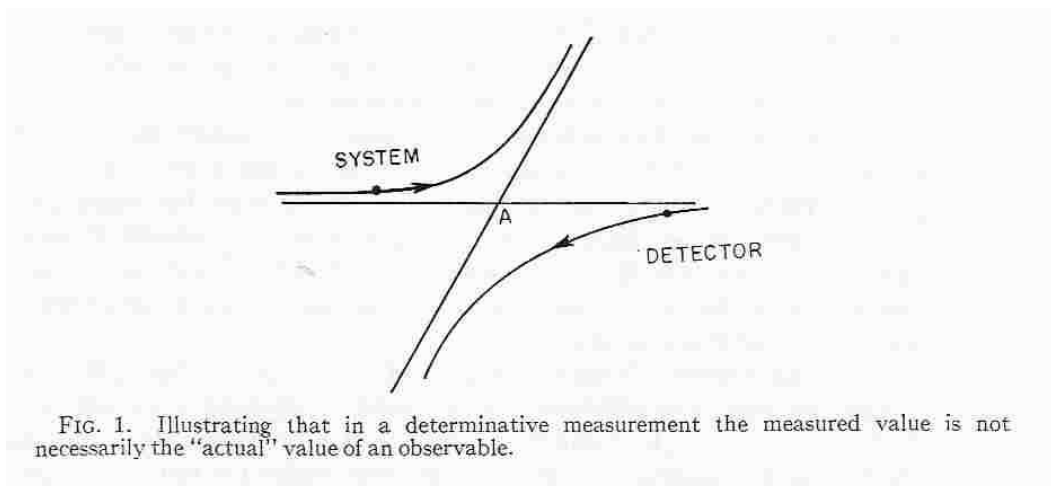


## 6 Was bei einer Messung vorgeht

Eine Messung enthält ein zu untersuchendes System  $S$  und ein Meßsystem (Meßapparatur)  $M$ . Das Meßsystem enthält ein Subsystem  $M_W$ , das in direkter physikalischer Wechselwirkung mit  $S$  stehen kann, d.h.  $S$  und  $M_W$  beeinflussen sich wechselseitig (wenn sie nicht gerade räumlich voneinander separiert sind). Neben diversen Zwischengliedern enthält  $M$  auch eine Anzeigeapparatur  $M_A$ , von der ein Beobachter  $O$  (dessen Bewußtseinszustand in unseren Überlegungen keine Rolle spielt) das Resultat ablesen kann [Statt von  $M_A$  spricht man oft schematisch von einem Zeiger (pointer) der auf eine Ziffer (das Resultat) weist]. Im zeitlichen Ablauf kann man beim Meßvorgang drei Phasen unterscheiden:

- (i) Vor der Wechselwirkung:  $S$  und  $M_W$  sind separiert (wechselwirkungsfrei),  $M_A$  zeigt den Zustand von  $M_W$  vor der Wechselwirkung (der eigentlichen Messung) an.
- (ii) Wechselwirkungsphase:  $S$  und  $M_W$  beeinflussen sich gegenseitig.
- (iii) Nach der Wechselwirkung:  $S$  und  $M_W$  sind wieder separiert,  $M_A$  zeigt den neuen Zustand von  $M_W$ , der sich als Konsequenz der Wechselwirkung mit  $S$  (nach der Beendigung der Wechselwirkung) eingestellt hat.

Das Resultat ist die neue Zeigerstellung, bzw die Differenz zwischen alter und neuer Zeigerstellung. Die Aufteilung des Meßprozesses in diese drei Phasen, ist besonders typisch für ein Streuexperiment (siehe Fig.1 von Prugovecki [16]), ist aber allgemein sinnvoll.



Im allgemeinen wird der Wert der gemessenen Observablen durch den Meßvorgang *verändert*. Der Wert kann in speziellen Fällen auch unverändert bleiben, aber wenn man allgemein gültige Schlußfolgerungen ziehen will, muß man die

Möglichkeit von Veränderungen berücksichtigen. Wir haben also in unserem bisherigen Begriff der *Messung* eine Zweideutigkeit. Es gibt zwei Möglichkeiten, entweder

- (i) die Meßapparatur ist so beschaffen, daß man (aus der Zeigerstellung der Anzeigeapparatur  $M_A$ ) Schlußfolgerungen auf den Wert der Observablen unmittelbar *vor* Beginn der eigentlichen Messung (d.h. Wechselwirkung) ziehen kann, oder
- (ii) die Meßapparatur ist so beschaffen, daß man Schlußfolgerungen auf den Wert der Observablen unmittelbar *nach* Ende der eigentlichen Messung ziehen kann.

Es kann wie gesagt (in Sonderfällen) auch Meßapparaturen geben, wo beides möglich ist.

Nur Möglichkeit (i) ist eine Messung im eigentlichen Sinn (eine Feststellung dessen, was zu einem bestimmten Zeitpunkt der Fall ist). Der Begriff *Messung* soll im Folgenden ausschließlich (wenn nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben wird) fuer diese erste Möglichkeit (i) verwendet werden. Im Fall der Möglichkeit (ii) handelt es sich um so etwas wie eine Prophezeihung. Man verwendet dafür den Begriff *Preparation* oder *Zustandspreparation*. Die Apparatur dient in diesem Fall dazu, das System in einen bestimmten Zustand zu bringen, der z.B. für die Durchführung eines bestimmten (zukünftigen) Experiments benötigt wird [Wenn wir einen Überbegriff benötigen, wenn also zwischen einer Messung und einer Preparation nicht unterschieden werden soll, können wir z.B. einfach den Ausdruck *Experiment* verwenden].

Zwei Beispiele:

- (a) Das Experiment, das im Abschnitt 5 behandelt wurde, ist eine Messung. Ort und Impuls eines Teilchens wurden zum selben Zeitpunkt mit einer Genauigkeit, die nicht durch die Unschärferelation (4) beschränkt ist, bestimmt. Dieses Experiment ist als Zustandspreparation nicht brauchbar, da sich die gemessenen Werte nicht auf die Zukunft beziehen (das Teilchen steht nach dem Aufprall am Schirm für weitere Experimente auch gar nicht mehr zur Verfügung). Die Ungleichung (statistisches Dispersionsgesetz) (3) ist im statistischen Sinn, bei Messung an vielen identisch präparierten Systemen erfüllt (die Größen  $\Delta q$  und  $\Delta p$  haben nichts zu tun mit allfälligen Fehlern  $\delta q$  und  $\delta p$ , die durch die Details dieses speziellen Experiments bestimmt sind).
- (b) Untersuchen wir, wie die berühmte Heisenbergsche Ortsmessung eines Elektrons mit Hilfe eines Lichtmikroskops [9] in das obige Schema passt. Ein Elektron bewege sich in  $x$ -Richtung, sein Impuls  $p_x$  sei genau bekannt. Zum Zweck der Ortsmessung wird Licht der Wellenlänge  $\lambda$  an dem bewegten Elektron gestreut und fällt auf die Linse eines Mikroskops. Der

Öffnungswinkel der Linse sei  $\alpha$ . Für die kleinste Länge  $\delta x$ , die dieses Mikroskop auflösen kann, gilt  $\delta x \sim \frac{\lambda}{\sin \alpha}$ . Damit die Ortsmessung funktionieren soll, muß mindestens ein Photon an dem Elektron gestreut werden. Dabei wird ein Impuls der Größenordnung  $\frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$  ausgetauscht. Genauer: Je nachdem, wo das gestreute Photon in der Linse ankommt wird ein Impuls im Bereich  $\pm \frac{h \sin \alpha}{\lambda}$  ausgetauscht. Wenn man dies mit  $\delta p_x$  identifiziert, bekommt man für das Produkt  $\delta x \delta p_x$  etwas heraus, nämlich

$$\delta x \delta p_x \sim \frac{\lambda}{\sin \alpha} \frac{h \sin \alpha}{\lambda} = h, \quad (4)$$

was auf den ersten Blick so ähnlich wie Gl. (3) aussieht (unterschiedliche Faktoren und der Unterschied zwischen  $h$  und  $\hbar$  sind unwichtig). Die Relation (4) bezieht sich aber auf ein einzelnes Experiment, ein weiterer wichtiger Unterschied ist, daß Gl. (3) Teil des quantenmechanischen (mathematischen) Formalismus ist, während Gl. (4) das nicht ist.

Dieses Experiment ist gemäß unserer präzisierten Einteilung eine Messung der Ortsvariablen (und nur dieser) *und* eine Zustandspreparation. Der Wert der Ortsvariablen  $x$  unmittelbar vor dem Experiment kann mit der Genauigkeit  $\delta x$  bestimmt werden. Es handelt sich aber nicht um eine gleichzeitige Orts- und Impulsmessung; Gl. (4) sollte nicht in diesem Sinn mißverstanden werden. Die Impulsunschärfe  $\delta p_x$  bezieht sich auf den Zeitpunkt *nach* der Messung. Insofern ist diese Ortsmessung für unsere Diskussion der Unschärferelation ohne Belang. Andererseits ist die Ortsunschärfe auch unmittelbar nach dem Experiment durch  $\delta x$  gegeben. Die hier gültige Heisenbergsche Unschärferelation (4) bezieht sich also nicht auf die gleichzeitige Messung zweier (nicht-kommutierender) Observablen sondern auf die *Präparation* eines Zustandes. [Heisenberg erwähnt (auf Seite 15 des zitierten Buches [9]), daß sich die Aussage über den Impuls auf die Zukunft bezieht, betrachtet aber im weiteren die Werte vor der Wechselwirkung, die die eigentlichen Meßwerte sind, als unwichtig].

Fassen wir zusammen. Bei den gewählten Beispielen hatten wir folgende Schlußfolgerungen:

- Für Messungen gilt die Heisenberg'sche Unschärferelation (Gl. (4) für gleichzeitige Messungen an einzelnen Systemen) nicht. Im statistischen Sinn gilt das Dispersionsgesetz Gl. (3)
- Für Zustandspräparationen gilt die Heisenberg'sche Unschärferelation (Gl. (4) für gleichzeitige Messungen an einzelnen Systemen).

Diese Resultate sind allgemeingültig; es gibt bei Präparationen keinen Eingriff, der die Unschärfe umgeht (man vergleiche die entsprechende Diskussion beim

Doppelspaltexperiment). Wir haben damit die Bedeutung beider Varianten der Unschärferelation geklärt.

An dieser Stelle kann man folgenden Einwand machen: Auch wenn die gleichzeitige *Messung* von nicht-kommutierenden Observablen möglich ist - d.h. wenn die Heisenberg'sche Unschärferelation nicht auf Messungen angewendet werden kann - ist bei der *Präparation* ebendiese Heisenbergsche Unschärferelation gültig. Ist dieser Unterschied wirklich wichtig? Jedenfalls hat man bei der Messung Systeme vor sich, deren konjugierte Variablen eine Unbestimmtheit (gemäß der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation) aufweisen. Auch wenn bei einzelnen Messungen die Werte von nicht-kommutierenden Observablen exakt bestimmt werden können, kommt die Heisenberg'schen Unschärferelation sozusagen durch die Hintertür über das statistische Dispersionsgesetz wieder herein. Letzteres widerspiegelt ja nur die Unschärfe, die schon bei der Präparation notwendigerweise auftrat, und die durch die Heisenberg'sche Unschärferelation bestimmt war. Daher ist das statistische Dispersionsgesetz im wesentlichen äquivalent der Heisenberg'schen Unschärferelation (welchen Namen - Messung oder Preparation - man verwendet sollte eigentlich nicht so wichtig sein). Daher ist das Problem semantischer Natur und die KI ist doch "richtig".

Zu diesem Einwand kann man folgendes sagen. Richtig ist, daß die Unschärfe bei der Präparation natürlich im statistischen Dispersionsgesetz wiederzufinden ist. Die Verwechslung von Messung und Präparation (von Gegenwart und Zukunft) sollte man aber trotzdem vermeiden. Die Unschärfe bei der Präparation ist ein experimentell und theoretisch klar definiertes Faktum; sie geht sozusagen auf die Beschränktheit der real existierenden "Sonden" (Licht) zurück. Wenn man die Präparation fälschlich als Messung betrachtet, muß das zu Ungereimtheiten führen, die nur durch spekulative Zusatzannahmen zu "beheben" sind, bzw. Scheinprobleme (das Messproblem) erzeugen.

## 7 Zur Struktur der Quantenmechanik

Einige Zusatzbemerkungen zur Struktur der Quantenmechanik, insbesondere im Vergleich zur klassischen Physik.

### Die unterschiedliche Rolle der Meßinstrumente

Die obige allgemeine Darstellung eines Messvorgangs macht keinen Unterschied zwischen klassischen und quantenmechanischen Objekten, trägt der Struktur der Mikrowelt aber insofern Rechnung, als zwischen dem Wert einer Observablen vor der Messung und dem Wert nachher unterschieden wird. Die Differenz ist natürlich auf den Einfluß der Meßapparatur zurückzuführen.

Wenn man die Eigenschaften makroskopischer (massiver) Objekte untersucht (auf die bei der Messung ausreichend kleine Störungen ausgeübt werden) gibt es faktisch keinen Unterschied zwischen dem Wert der gemessenen Größe vor

und nach dem Messprozess; der festgestellte Wert ist auch bei einer zukünftigen weiteren Messung brauchbar. In diesem Sinn (bzw. im Rahmen dieser Approximation) ist der Wert von der Beobachtung und vom Beobachter unabhängig und ist eine objektive Eigenschaft des untersuchten Objekts. Wenn das der Fall ist, ist man im Gültigkeitsbereich der klassischen Physik.

Wenn die Objekte fragiler werden, wird der Einfluß der Messung nicht mehr vernachlässigbar sein. Nachdem es prinzipielle Beschränkungen für die verfügbaren Sonden gibt (z.B. hat man bei der Verwendung von Licht begrenzte Möglichkeiten, wie man in Abschnitt 1 beim Doppelspaltexperiment gesehen hat), ist es möglich, daß eine theoretische Beschreibung mikroskopischer Objekte ohne Berücksichtigung dieser Begrenzungen falsch wird. Dies ist tatsächlich der Fall, wie man daran sieht, daß die Klassische Mechanik bei der Beschreibung des Verhaltens sehr kleiner Teilchen falsch wird. In diesem Bereich gilt die Quantenmechanik. Die Begriffe Messung und Preparation müssen unterschieden werden.

### **Präparation und Zustand**

Die Aussagen der Quantentheorie beziehen sich auf ein statistisches Experiment. Das bedeutet, daß man ein bestimmtes Experiment sehr oft wiederholen muß - und alle gemessenen Daten speichern muß - bevor man - nach Auswertung aller Daten - einen Vergleich mit den theoretischen Vorhersagen anstellen kann. Eine selbstverständliche Voraussetzung für das Funktionieren eines statistischen Experiments ist, daß jedesmal genau die gleichen Bedingungen herrschen. Das System das untersucht werden soll, muß also bei jedem der vielen Einzelerperimente in (möglichst) genau den gleichen Zustand gebracht werden, bevor man die eigentliche Messung (die manchmal auch treffend als "Test" bezeichnet wird [15]), vornimmt. Dieser Vorgang - nämlich ein System mit präzise definierten Eigenschaften zu erzeugen - wird als *Zustandspreparation* (oder einfach *Preparation* bezeichnet. Die Zustandspreparation wird durch menschlichen Eingriff bewirkt und stimmt im wesentlichen mit dem Vorgang überein, den wir schon oben als Preparation bezeichnet haben (Festlegung physikalischer Eigenschaften für zukünftige Experimente). Eine Preparation ist die Erzeugung eines physikalisch wohldefinierten (und reproduzierbaren) *Zustands* (der Ausdruck "physikalisch wohldefiniert" bedeutet nicht, daß alle Observable scharfe Werte haben müssen, wie in der klassischen Physik).

Mit Hilfe einer Präparationsprozedur (d.h. mit Hilfe einer Reihe von Apparaturen zusammen mit genauen Bedienungsanleitungen) kann man viele einzelne Systeme im selben Zustand, d.h. ein statistisches Ensemble, erzeugen. Im Unterschied zu einer Messung, die einen konkreten Tatbestand darstellt, stellt eine Präparation eher eine Möglichkeit dar, nämlich die Möglichkeit, ein System in einem bestimmten Zustand zu erzeugen. Eine Präparationsprozedur erzeugt also einen Zustand. Das umgekehrte gilt nicht, da es i.A. mehrere Präparationsprozeduren gibt, die denselben Zustand erzeugen. Die Gesamtheit aller Präparationsprozeduren, die alle denselben Zustand erzeugen, bildet eine

Äquivalenzklasse. Mit Hilfe dieser Konstruktion können wir die Zuordnung umkehrbar eindeutig machen. Man kann dann den Zustand mit dieser Äquivalenzklasse aller Präparationsprozeduren identifizieren (die Unterscheidung zwischen einzelner Präparationsprozedur und zugehöriger Äquivalenzklasse ist für prinzipielle Überlegungen wichtig; für viele praktische Probleme ist sie bedeutungslos und bleibt oft unerwähnt).

Zwei Beispiele für Präparationen [2, 13]:

- Wenn man ein Lichtmikroskop hat, wie im obigen Beispiel, kann man damit einen Zustand erzeugen, der Elektronen mit minimalem Unschärfeprodukt beschreibt.
- Das Aussondern von Licht einer bestimmten Wellenlänge mit Hilfe eines Prismas und eines Spaltes.

Der Zustand, bzw das System, das sich in diesem Zustand befindet, wird im Anschluß an die Präparation einer Serie von Messungen unterworfen. Wenn eine bestimmte Eigenschaft wiederholt gemessen wird, differieren die Meßresultate. Nach sehr vielen Wiederholungen kann man aber für jedes Meßresultat eine Wahrscheinlichkeit ermitteln. Man erhält eine *Wahrscheinlichkeitsverteilung*, d.h. eine Wahrscheinlichkeit für jeden Wert den die untersuchte Eigenschaft annehmen kann; man kann aber an einem gegebenen Zustand i.A. mehrere Eigenschaften untersuchen. Die Gesamtheit dieser Wahrscheinlichkeiten (bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilungen) ist die Information, die von der Meßapparatur *bei gegebenem Zustand* geliefert wird [Diese Information ist ein Mittelding zwischen der deterministischen Vorhersage (die die klassische Physik liefert) und dem völligen Verzicht auf jede Vorhersage, sei sie auch nur statistischer Natur. Rein logisch scheint eine Welt, in der gar keine Vorhersagen - auch solche statistischer Natur - gemacht werden können, möglich. Man kann sich aber schwer vorstellen, daß in einer solchen Welt regelmäßige Strukturen oder gar Formen des Lebens existieren können]

### **Ist ein Würfelspiel ein Experiment, das etwas über die objektive Realität aussagt ?**

Im Prinzip muß man auch in der klassischen Physik ein System präparieren, bevor man eine Messung macht. Man wird aus praktischen Gründen auch bei einem makroskopischen Experiment mehrere Messungen hintereinander ausführen, um Fehler und/oder statistische Schwankungen zu identifizieren. Im Prinzip genügt aber im Rahmen der klassischen Physik *eine* Messung; alle Eigenschaften, die man messen kann, haben genau einen möglichen Wert (in einem Zustand des Systems). In diesem Sinn werden die Resultate als Eigenschaften einer objektiven [= vom Betrachter (Experimentator) unabhängigen] Realität betrachtet und die Präparationsprozedur hat eine untergeordnete Bedeutung.

Im Gegensatz dazu ist die Präparationsprozedur im Rahmen der Quantenmechanik eine notwendige Voraussetzung dafür, daß man überhaupt eine the-

oretische Vorhersage (die immer nur die Wahrscheinlichkeit angibt, einen bestimmten Wert zu messen) machen kann [in dem praktisch so wichtige Bereich der Vielteilchenphysik sind die Vorhersagen allerdings von großer Genauigkeit; das ist aber jetzt belanglos]. Ohne Eingriff des Beobachters gibt es überhaupt keine Aussage. Daher betreffen die Aussagen der Quantentheorie genaugenommen nicht Objekte, die unabhängig vom Beobachter existieren. Infolgedessen haben auch die üblichen Begriffe der klassischen Physik, wie Ort, Impuls, etc - die ja letztlich durch Meßvorgänge definiert werden - genau genommen einen anderen und im Vergleich zur klassischen Physik eingeschränkten Sinn; sie sind nicht unabhängig von der Versuchsanordnung definiert. Daher muß jeder Meßgröße (Observable) ein zusätzlicher "Index", oder eine zusätzliche "Variable", zugeordnet werden, um den Zustand [die Präparationsapparatur(en)] anzugeben, in dem das untersuchte System bei der Ermittlung des Wertes der Observable war. Insgesamt muß also ein Meßwert (mindestens) zwei "Indizes" haben: einen, der die Observable - bzw. den Wert der Observable - angibt und einen zweiten, der den Zustand angibt [Genau das ist im quantenmechanischen Formalismus der Fall. Die Meßwerte sind Wahrscheinlichkeiten der Form  $|\langle\psi|\phi\rangle|^2$ ; die Größe  $\psi$  gibt den Zustand an, die Größe  $\phi$  kennzeichnet den Wert der Observable (ist Eigenfunktion eines Operators zu einem bestimmten Eigenwert dieses Operators)].

Während es offensichtlich ist, daß die Observable in der Quantenmechanik eine andere Bedeutung als in der Klassischen Physik haben, ist es ziemlich schwierig anzugeben, worin diese Einschränkung *genau* besteht. Das liegt daran daß unsere Denkgewohnheiten sehr stark durch das Begriffssystem der Klassischen Physik - vor allem durch die Vorstellung einer objektiven, unabhängig von uns existierenden Realität - geprägt sind.

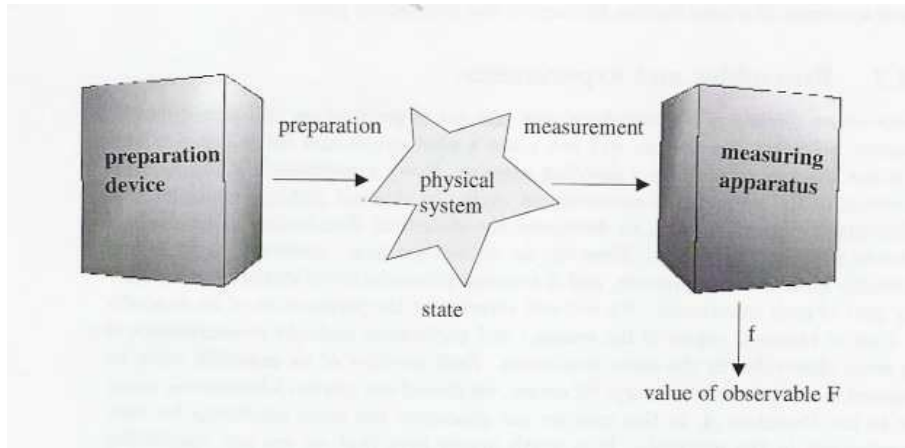
Aus dem bisherigen geht hervor, daß Zustand (Präparation) und Observable (Messung) die grundlegenden Konzepte der Quantenmechanik sind. Der Ordnung halber sollten wir uns daher das zweite Begriffspaar auch noch etwas genauer ansehen.

### Messung und Observable

Nachdem das System geeignet präpariert wurde, wird es - wie oben schon erwähnt - mit Hilfe einer Meßapparatur einer Wechselwirkung unterzogen, die so beschaffen ist, daß eine bestimmte Eigenschaft, oder Observable, gemessen werden kann. Das Resultat der Messung ist eine reelle Zahl, die den Wert der Eigenschaft bei dieser Messung angibt (die gemessenen reelle Zahl differiert i.A. für verschiedene Teilsysteme des statistischen Ensembles und man muß viele Messungen durchführen, um mit der theoretischen Vorhersage vergleichen zu können). Ein oft verwendetes Beispiel ist eine Stern-Gerlach Apparatur zur Messung des Spins. Die Apparatur legt fest, welche Eigenschaft des Systems gemessen wird. Das umgekehrte gilt nicht, da es (ganz analog wie oben bei Präparation und Zustand) i. A. mehrere, ganz verschiedene Meßapparaturen geben wird, die alle verwendet werden können um die selbe Eigenschaft (z.B. den Spin) des unter-

suchten Systems zu ermitteln. Man kann aber wieder (wie oben) die Observable mit der Äquivalenzklasse aller dieser Apparaturen identifizieren.

Die Begriffe Zustand und Observable - die beiden grundlegenden Konzepte der Quantentheorie - sind im folgenden Diagramm [17] illustriert.



Eine Observable (eines Systems) ist also eine meßbare Eigenschaft (eines Systems). Die Apparatur die die Eigenschaft mißt - bzw. die Präparationsprozedur, d.h. der Vorgang bei dem die Apparatur zum Einsatz kommt (siehe hierzu die Bemerkungen in Kap.2 von Ballentine [2]) - kann als die materielle Realisierung des Begriffs der Observablen betrachtet werden. An dieser Stelle sollte man erwähnen, daß man zusätzlich (zu den Apparaturen) auch noch eine begriffliche *Interpretation*, d.h. eine Theorie benötigt, um eine Observable zu charakterisieren. Ohne eine theoretische (physikalische) Definition funktioniert das alles nicht.

Es gibt natürlich i.A. mehr als eine Observable. Prinzipiell hat jede Observable eine gewisse Menge von reellen Zahlen als mögliche Meßwerte (das *Spektrum* der Observablen, es kann sich um eine diskrete und/oder überabzählbare Menge von reellen Zahlen handeln) Man macht darüber hinaus einige Annahmen [17] betreffend die Eigenschaften von Observablen:

- I Jede Observable kann mit beliebiger Genauigkeit gemessen werden. (Dies ist eine Idealisierung, die ausdrücken soll, daß prinzipielle Grenzen für die Genauigkeit von Messungen nicht bekannt sind)

Die Aussagen der (statistischen Interpretation der) Quantentheorie sind statistischer Natur. Nach vielen Messungen kann man einen Vergleich mit theoretischen Vorhersagen machen, u. zwar bezüglich der Wahrscheinlichkeit  $p(S, F, f)$  einen Wert  $f$  aus dem Spektrum einer Observablen  $F$  zu messen, wenn das System (vor jeder Messung) im Zustand  $S$  präpariert wurde. Dieses Resultat hängt von der untersuchten Eigenschaft ( $F$ ) des untersuchten Systems ebenso ab, wie von dem



Wert ( $f$ ), den diese Eigenschaft hat, und dem Zustand ( $S$ ) in dem das System sich befindet. Wenn man annimmt, daß  $p$  bei fixem  $F$  und fixem  $f$  und variablem  $S$  jeden sinnvollen Wert (d.h. jeden Wert zwischen 0 und 1) annimmt, dann muß es auch ein  $S \equiv S_f$  geben, bei dem  $p = 1$  ist, d.h. bei dem bei allen Messungen der Wert  $f$  beobachtet wird. Wenn  $S \equiv S_f$  ist, dann hat die Observable  $F$  mit Sicherheit - bei jeder einzelnen Messung - den Wert  $f$  [das System verhält sich dann *in diesem Zustand und für diese eine Observable* sozusagen klassisch]. Wenn man andererseits bei einer Serie von Messungen in einem Zustand  $S$  feststellt, daß jedesmal der gleiche Wert  $f$  gemessen wird, dann kann man daraus schliessen, dass diese Meßapparatur einer Observablen ( $F$ ) entspricht, die den Meßwert  $f$  hat (dann ist  $S \equiv S_f$ ). Wenn für ein bestimmtes  $f$  ein solches  $S \equiv S_f$  nicht existiert, dann kann man keine Observable mit diesem Meßwert assoziieren. Es handelt sich also um eine fundamentale Konsistenzbedingung, die man guten Gewissens postulieren kann:

- II Für jede Observable  $F$  und jeden Wert  $f$  des Spektrums von  $F$  kann ein Zustand präpariert werden, für den bei allen Messungen der Observablen  $F$  der Wert  $f$  gemessen wird. Solche Messungen, die immer den gleichen Wert ergeben, werden *reproduzierbar* genannt.

Diese beiden Postulate I,II gelten für jede Theorie, für die Klassische Physik ebenso wie für die Quantenmechanik. Der Unterschied zwischen beiden wird sichtbar, wenn man *mehrere* Observable betrachtet. In der Klassischen Physik gilt eine Erweiterung von Postulat II auf mehrere Observable, die man als Postulat des *Determinismus* (Postulat II<sub>c</sub>) bezeichnen kann:

- II<sub>c</sub> Es ist immer möglich einen Zustand zu präparieren, in dem die Messungen für alle Observablen reproduzierbar sind (So ein Zustand wird als *klassischer reiner Zustand* bezeichnet).

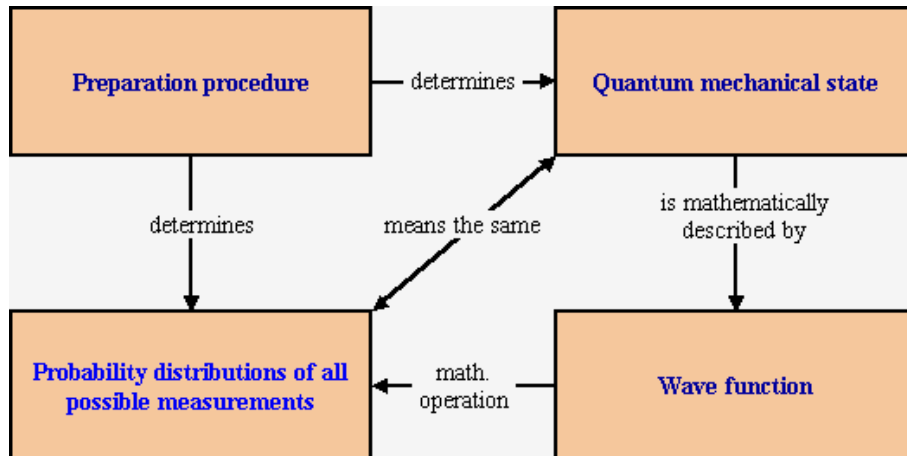
Postulat [II<sub>c</sub>] stellt in der klassischen Physik eine Selbstverständlichkeit dar. Konkret bedeutet es z.B. daß bei festen Anfangsbedingungen ein System von Teilchen genau eine Bahn ausführt.

In der Quantenmechanik gilt Postulat II<sub>c</sub> nicht, wie die statistische Dispersionrelation (die so oft mit der Heisenberg'schen Unschärferelation verwechselt wird) zeigt. Diese Tatsache kann man kurz so formulieren: Klassische reine Ensembles existieren nicht. Ausführlicher lautet diese Aussage über den *Indeterminismus* der Quantentheorie folgendermaßen:

- II<sub>q</sub> Es ist unmöglich einen Zustand zu präparieren, in dem die Messungen für alle Observablen reproduzierbar sind.

Im Unterschied zur Klassischen Mechanik ist also ein quantenmechanisches System nicht durch die Angabe der Zahlenwerte *aller* Observablen charakterisierbar.

Die statistische Interpretation liefert also zwei klare Grundkonzepte der Quantentheorie. Diese Konzepte müssen in einen mathematischen Formalismus “übersetzt” werden, der dann erst - zusammen mit der Interpretation- eine komplette physikalische Theorie darstellt. Das folgende Diagramm [13] illustriert die Situation.



Es gibt (mindestens) zwei Wege, um zu einer mathematischen Formulierung der Quantentheorie zu kommen. Der erste (übliche, siehe obiges Diagramm) ist axiomatischer Natur: Man postuliert, daß jedes quantenmechanisches System durch einen Hilbertraum dargestellt wird. Die Zustände (Präparationsapparaturen) des Systems entsprechen den Vektoren (genauer: Strahlen) in diesem Raum. Die Observablen (Meßapparaturen) entsprechen den selbstadjungierten Operatoren in diesem Raum. Aus dem Spektrum der Operatoren kann man bei gegebenem Zustandsvektor die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Meßwerte aller Observablen berechnen.

Der zweite Weg versucht, den Übergang zu der mathematischen Struktur des Hilbertraums zu erleichtern, indem ein Zwischenschritt eingelegt wird. Dieser Zwischenschritt besteht darin, die Logik (Quanten-Logik), die den Vorgängen im Mikrokosmos zugrunde liegt axiomatisch zu erfassen, und daraus, die Hilbertraum Struktur abzuleiten, oder zumindest verständlich zu machen [11]. Aber das ist eine andere Geschichte. . .

Abschließend eine Klarstellung zu der Tatsache, daß in der bisherigen Diskussion der Begriff der Zeit, bzw. der Begriff der dynamischen Entwicklung eines Zustands nirgendwo auftrat. Dies war nicht nötig, so wichtig auch immer die Schrödingergleichung für praktische Zwecke sein mag. Wir haben die Zeitentwicklung einfach als Teil des Präparationsprozesses betrachtet und konnten dadurch diesen Aspekt vollkommen ausklammern.

## 8 Abschließende Bemerkungen

Die experimentelle Technik zur Zeit der Entstehung der KI - etwa 1927- erlaubte es, auf Grund zu geringer Auflösung, nicht, das Auftreffen von einzelnen Teilchen auf dem Schirm zu beobachten. In dem Buch von Feynman wird die experimentelle Technik von *heute* ausgenützt um dem Problem so genau wie möglich auf den Grund zu gehen. [Dies steht im Gegensatz, zu der pauschalen Art, in der in den meisten (älteren) Lehrbüchern (ein Standardwerk und typisch in dieser Hinsicht: Messiah) die für die Interpretation relevanten experimentellen Ergebnisse behandelt werden]. Es ist gerade diese präzise Schilderung - die zu Recht oft gerühmt wird - die es dem aufmerksamen Leser absolut unmöglich macht, Feynman's Interpretation - die im wesentlichen mit der von 1927 übereinstimmt - nachzuvollziehen.

Die typischen Annahmen der KI, etwa daß die Quantenmechanik die Vorhersage von einzelnen Ereignissen erlaubt, oder daß ein Objekt, je nach experimenteller Situation einmal den Charakter eines Teilchens und dann den einer Welle annimmt, scheinen auf Grund der experimentellen Beobachtungen beim Doppelspaltexperiment unhaltbar zu sein. Es ist zwar bekannt, daß sich die KI im Vergleich zu ihrer ursprünglichen Form mehrmals geändert hat, bzw. daß mehrere Varianten existier(t)en [14]. In allen Varianten der KI wird aber nach wie vor die fundamental statische Natur der Quantenmechanik und ihre Unvollständigkeit in Bezug auf Einzelereignisse - wie sie in den Experimenten klar zu Tage tritt und bereits von Einstein ebenso klar diagnostiziert wurde - geleugnet.

Obwohl die KI als kollektiver und langandauernder physikalischer Irrweg von erschreckendem Ausmaß erscheint, kann sie auf Grund der Tatsache, daß es sich um eine *Interpretation* handelt, nicht im eigentlichen Sinn (durch experimentelle Daten) widerlegt werden. Als Fehlinterpretation ist sie aber daran zu erkennen, daß sie - als Konsequenz von ungerechtfertigten Annahmen - Scheinprobleme erzeugt. Sie macht die Dinge dadurch noch schwieriger als sie eigentlich - ohne die ungerechtfertigten Annahmen - sind. Damit wird ein positivistisches Grundgefühl der Physiker verstärkt, das in der Praxis auf folgende Haltung hinausläuft: versuche gar nicht erst, die Natur zu verstehen, probiere einfach eine mathematische Möglichkeit aus, und sieh nach was daraus folgt...(Dirac: "thrust the mathematics.."). Damit hat die KI zweifellos zu der exzessiven mathematischen Spekulationswut beigetragen, von der große Teile der modernen Grundlagenforschung befallen sind.

Noch fataler ist aber, daß die KI die Weiterentwicklung der physikalischen Forschung (in Bezug auf grundlegende Fragen) blockiert. So lange die KI - in originaler oder variiertes Form - regiert, hat man mit der Vorstellungswelt der klassischen Physik noch nicht abgeschlossen. Die KI ist ja genau diejenige Konstruktion, die alle grundlegenden Konzepte der klassischen Physik (nämlich Teilchen, Welle und Determinismus), beibehält (alle drei allerdings in abgeschwächter Form) Der nächste Schritt - falls es einen gibt - über die Quantenmechanik hinaus wird erst

gemacht werden können, wenn man die Reste der klassischen Physik die sich über die KI in die Quantenmechanik eingeschlichen haben, eliminiert hat. Die gute Nachricht ist, daß dies wahrscheinlich in nicht allzu langer Zeit passieren wird; in den letzten Jahren ist ein verstärkter Trend zu einer nüchternen (statistischen) Interpretation dieser fundamentalsten physikalischen Disziplin zu beobachten.

## References

- [1] G. Auletta. *Foundations and Interpretation of Quantum Mechanics*. World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 2001.
- [2] L. E. Ballentine. The statistical interpretation of quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 42:358–381, 1970.
- [3] L. E. Ballentine. *Quantum Mechanics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [4] John S. Bell. *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [5] P. S. Marquis de Laplace. *A Philosophical Essay on Probabilities*. Dover Publications, New York, 1951. Translation of *Essai philosophique sur les probabilités* 1819.
- [6] A. Einstein. *Reply to Criticism*, page 665. Harper and Row, New York, 1949.
- [7] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47(10):777–780, May 1935.
- [8] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics. Quantum Mechanics*, volume III. Addison-Wesley, Reading, MA, 1965.
- [9] W. Heisenberg. *Physikalische Prinzipien der Quantentheorie*. S.Hirzel Verlag, Stuttgart, 1958. S.16.
- [10] Alfred Landé. *Foundations of Quantum Theory*. Yale University Press, New Haven, 1955.
- [11] George W. Mackey. *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. W. A. Benjamin, Reading, MA, 1963.
- [12] H. Margenau. Quantum-mechanical description. *Physical Review*, 49:24–242, 1935.

- [13] R. Müller and H. Wiesner. Das Münchener Unterrichtskonzept zur Quantenmechanik.  
on-line: <http://web.phys.ksu.edu/vqmorig/tutorials/online/prep/index.html>.
- [14] R. Omnes. Consistent interpretations of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 64:339–382, 1992.
- [15] Asher Peres. *Quantum Theory : Concepts and Methods (Fundamental Theories of Physics, Vol 57)*. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [16] E. Prugovečki. On a theory of measurement of incompatible observables in quantum mechanics. *Can. J. of Physics*, 45:2173–2219, 1967.
- [17] E. V. Stefanovich. Relativistic quantum dynamics.  
e-print <http://xxx.arxiv.org/physics/0504062>.