1. Übung aus THERMODYNAMIK UND STATISTIK
SS 2007

Linz, Theoretische Physik
Übungstermin: 13.3.2007

1. Für eine *exakte* Differentialform $dF = F_1 dx + F_2 dy$ muss es ein $f(x, y)$ geben, sodass $F_1 = \partial f / \partial x$ und $F_2 = \partial f / \partial y$, und es gilt: $\partial F_1/\partial y = \partial F_2/\partial x$. Zeigen Sie, dass

   (a) $(4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy$

   (b) $2x(ye^{x^2} - 1)dx + e^{x^2}dy$

   exakte Differentialformen sind und bestimmen sie das dazugehörige $f(x, y)$.

2. $F(x, y, z) = 0$ definiert implizit Funktionen $x(y, z)$, bzw. $y(z, x)$, bzw. $z(x, y)$. Der *implizite Funktionensatz* besagt:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial x}$$

   (a) Zeigen Sie für alle Permutationen von x, y, z:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 1$$

   (b) Zeigen Sie:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

3. (a) Gegeben sei eine Verteilungsfunktion $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\exp[-\beta|\mathbf{x}|^2]$, wobei $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ ein m-dimensionaler Vektor ist (der Betrag in m Dimensionen ist $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$). Berechnen Sie die Normierung N, sodass gilt $\int^\infty d^m x\, f(\mathbf{x}) = 1$ ($\int^\infty$ bedeutet Integration über den ganzen Raum).

   (b) Zeigen Sie, dass das Volumen V einer m-dimensionalen Kugel (Radius R) gegeben ist durch $V = C_m R^m$ wobei $C_m = 2\pi^{m/2}/(m\Gamma(m/2))$. Berechnen Sie das Volumen ΔV einer dünnen Schale (Dicke d) um diese Kugel. Wie haengt $\Delta V/V$ von m ab? Was passiert im limes $m \to \infty$? (Hinweis: Das Volumen ist $V = \int^\infty d^m x\, \Theta(R^2 - |\mathbf{x}|^2)$. Verwenden Sie vollständige Induktion von $m - 1$ auf m.)

4. Maxwell-Boltzmann Verteilung: Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen der Masse m am Phasenraumpunkt $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ in einem Phasenraumvolumen $d^3r d^3v$ ($\mathbf{r}$... Ortsvariable, $\mathbf{v}$... Geschwindkeit) zu finden ist

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v})d^3r d^3p = \frac{1}{V}\left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta m v^2/2} d^3r d^3p$$

   wobei $\beta = 1/(k_B T)$ und V das Volumen des Behälters ist. P ist die Wahrscheinlichkeits*dichte*.

   (a) Was ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass das Teilchen am Ort $\mathbf{r}$ ist? Dass es die Geschwindigkeit $v = |\mathbf{v}|$ hat? Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit (Tipp: leiten Sie nach β ab).

   (b) $P(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ist Wahrscheinlichkeitsdichte für 1 Teilchen. Was ist die entsprechende Dichte für N unabhängige Teilchen?

   (c) Berechnen Sie die mittlere (kinetische) Energie eines Teilchens.

   (d) Berechnen Sie den Druck(=Kraft/Fläche) p eines Teilchens auf eine Wand, und zeigen damit die Zustandgleichung $pV = Nk_BT$ für das ideal Gas von N Teilchen.