3. Übung theoretische Physik III Institut für theoretische Physik, JKU Linz
WS 2009 Übungstermin: 28.10.2009

9. **Coulomb-Gesetz**

   (a) Leiten Sie das Coulomb-Gesetz aus den Maxwellgleichungen ab, d.h. zeigen Sie dass aus $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\,\pi\,\rho$ folgt, dass das Potential einer Punktladung

$$\phi = \frac{q}{r}$$

   ist. Bestimmen Sie das zugehörige elektrische Feld $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.

   (b) Bestimmen sie die Fouriertransformierte des Coulomb-Potentials in drei Dimensionen,

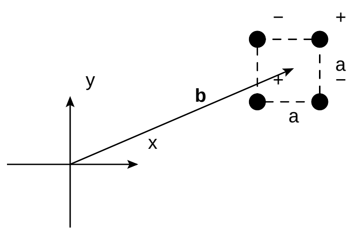
$$\phi(\mathbf{k}) = \int d^3r\, \mathrm{e}^{i\,\mathbf{k}\,\mathbf{r}}\, \phi(\mathbf{r}).$$

10. **Geladene Kugel**
Bestimmen Sie Potential und Feld einer homogen geladenen Vollkugel mit Radius R und Gesamtladung Q innerhalb und ausserhalb der Kugel

   (a) mittels Gauß'schem Satz,
   (b) durch Integration,
   (c) durch Lösung der Poissongleichung.

Fertigen Sie eine Skizze von ϕ und $\mathbf{E}$ an.

11. **Quadrupol**
Bestimmen Sie, ohne das Koordinatensystem zu wechseln, Potential und el. Feld eines Quadrupols dessen 4 Ladungen $\pm q$, wie gezeichnet, an den Ecken eines Quadrats mit Seitenänge a angeordnet sind; das Zentrum des Quadrats ist um $\mathbf{b}$ aus dem Koordinatenursprung verschoben.



12. **Besselfunktionen**
Zeigen Sie, dass die Besslefunktionen erster Art die Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_0^a d\rho\,\rho\,J_\nu\left(\alpha_{\nu,m}\,\frac{\rho}{a}\right)\,J_\nu\left(\alpha_{\nu,n}\,\frac{\rho}{a}\right) = \frac{a^2}{2}\,\big(J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,m})\big)^2\,\delta_{m,n}$$

erfüllen, wobei $\alpha_{\nu,m}$ die m-te Nullstelle von J_ν ist. Sie können sich auf nicht-negative, ganzzahlige ν beschränken.

Hinweise: Die Besslefunktionen sind Lösungen der Bessel'schen Differentialgleichung (BEQ)

$$\left[\frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}\,x\,\frac{d}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)\right]\,y(x) = 0.$$

Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left[z^n\, J_n(z)\right] &= z^n\, J_{n-1}(z),\\
\frac{d}{dz}\left[z^{-n}\, J_n(z)\right] &= -z^{-n}\, J_{n+1}(z),\\
J_{n-1} + J_{n+1} &= \frac{2\,n}{z}\, J_n,\\
J_{n-1} - J_{n+1} &= 2\, J_n'.
\end{aligned}$$

Die Funktionen

$$f_k^{(n)}(x) = \sqrt{x}\, J_n\left(\alpha_{n,k}\, \frac{x}{a}\right)$$

bilden demnach ein orthogonales System das als Basis benutzt werden kann, die Orthogonalität schreibt sich mit der Wahl $a = 1$ und Unterdrückung des (sinnlosen) Superscript

$$\int_0^1 dx\, f_k(x)\, f_l(x) \propto \delta_{k,l}.$$

Substituiert man in der BEQ $u(x) = \sqrt{x}\, y(x)$ und $x = \alpha\, z$ so erhält man

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \left(\alpha^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{z^2}\right)\right]\, u(\alpha z) = 0.$$