Über die Entstehung der analytischen Mechanik*

Harald Iro

Newtons revolutionäre mathematische Philosophie der Natur, die 'Philosophiae naturalis principia mathematica' (1687), wurde in ihrer Ausarbeitung mittels des Leibnizschen Kalküls die erste umfassende mathematische Theorie der Physik. Die hervorragendsten und bekanntesten Personen auf diesem Weg sind: Euler, Lagrange und Laplace. Newtons Gesetze zusammen mit seinem Gravitationsgesetz sind die Basis für das quantitative Verständnis der Konstellationen und Bewegungen im Plantensystem, des "Weltsystems", und darüber hinaus von Gestirnen.

Unter den ersten der die Leibnizsche Differentialrechnung auf die Principia anwendete, war ein eher unbekannter französischer Abbé, Pierre Varignon. Seine tastenden Versuche die Principia mit der neue Mathematik auszudrücken sind gerade nur von den Zeitgenossen beachtet worden. Vielfach gelten die 1710 erschienenen zwei Arbeiten von Jacob Hermann und jene von Johann Bernoulli über das sogenannte inverse Problem der Zentralkräfte[1] als Beginn der analytischen Mechanik. Der erste Höhepunkt der Entwicklung ist Eulers 'Mechanica sive Motus Scientia Analytice exposita' (1736), in welcher der Leibnizsche Differentialkalkül systematisch auf die Bewegung einer kleinen Masse angewendet wird. Die Analyse der Bewegung eines ausgedehnten starren Körpers in Eulers zweiter Mechanik, 'Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum' (1765), bildet den nächsten Meilenstein in der Entwicklung. In ihr werden erstmals die Rotationsbewegungen von Körpern untersucht.

Lagranges 'Mécanique analytique' (1788) schließlich ist ein geschlossenes, sehr mathematisches Gedankengebäude; Lagranges Darstellung ist bis heute kaum übertroffen. Ungefähr gleichzeitig erklärt Laplace in seinem Monumentalwerk 'Traité de mécanique céleste' (1799-1925) den Bau des Weltsystems auf der Basis der Newtonschen Ideen. Die weitere Entwicklung der Mechanik im 19. Jahrhundert führte zu einer vorbildhaften Theorie der Physik im Speziellen und der Naturwissenschaften im Allgemeinen.

1 Newtons Principia

Die Werke antiker Mathematiker wie jene von Euklid und Archimedes waren auch noch zu Beginn der Neuzeit die wesentlichen Grundlagen für die quantitative, mathematische Beschäftigung mit der Natur, wie beispielsweise bei Galilei (freier Fall) und Huygens (Pendeluhr, Stoß). In der Astronomie wurde die jahrtausendelange Beschäftigung mit den Gestirnen von Kepler mit seinen drei Gesetzen gekrönt. Unter diesen Voraussetzungen erarbeitete Newton in seiner Principia eine Gegenposition zu Descartes 'Principia philosophiae'[2] und speziell zur seiner Wirbelkonzeption des Weltalls. Einige von Descartes Hypothesen über den Kosmos und die Kosmogonie:

- Die Materie aller Körper ist die gleiche.

*Oder: Die Erbsünde der Naturwissenschaften

[1] Eine Kraft wird Zentralkraft genannt, wenn sie von einem Punkt ausgeht und ihre Stärke nur vom Abstand zu diesem Punkt abhängt. Newton verwendet die Bezeichnung Zentripetalkraft.

[2] Im Titel der Newtonschen 'Philosophiae naturalis principia mathematica' sind die Worte Philosophiae und Principia in roter Farbe hervorgehoben.

- Da es kein Vakuum gibt, füllt die Materie in vielen, vielen Stücken von verschiedener Größe, die sich in unterschiedlicher Weise bewegen, den ganzen Raum.
- Weil Kugeln, selbst dicht gepackt, Zwischenräume lassen würden, müssen die Teile der Materie eckig sein.
- Durch die Bewegung und durch Abrieb werden die Teile mehr oder weniger kugelförmig.
- Die kleinen und kleinsten Teilchen bilden eine sublime Materie, die den restlichen Raum ausfüllen.
- Wegen der unendlichen Teilbarkeit der Materie kann es keine Atome geben.
- Weil Gott vollkommen ist, ist es legitim anzunehmen, daß er am Anfang die Materie in ungefähr gleich große Stücke geteilt hat, die eine kreisförmige Bewegung in der Form eines Wirbels durchführen; diese Bewegung erklärt die Position und Bewegung der Planeten.

Descartes Philosophie ist nicht nur für Newton und Voltaire unbefriedigend.

1.1 Der Inhalt der Principia

Vor die drei Bücher seiner Principia setzt Newton nebst einigen Definitionen 'seine'[3] drei Gesetze. Für das Folgende sind insbesondere das erste und zweite Gesetz von Bedeutung:

1.) Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

2.) Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

Eingebettet in Newtons absolutem Raum und absoluter Zeit sind die Gesetze das Fundament der klassischen Mechanik. Im dritten Buch entwickelt Newton mit den 3 Gesetzen und dem Gravitationsgesetz seine mathematische Philosophie der Natur, des Weltsystems. In seinen Rechnungen macht er allerdings von seiner Fluxionenrechnung nicht Gebrauch. Er arbeitet mit der sogenannten geometrischen Methode bei der mit Hilfe von schwerfälligen [Mach] Proportionen Ausdrücke für eine Größe als Funktion einer anderen Größe gefunden werden; eine Bezugnahme auf eine Zeichnung ist dabei unerläßlich. Überdies ist es notwendig auch Kräfte – nicht nur Orte und Geschwindigkeiten – in einer Zeichnung durch Strecken zu repräsentieren.

Die ersten beiden Bücher der Principia beschäftigen sich mit der Bewegung. Im ersten Buch wird der Zusammenhang zwischen Bahn und Kraft untersucht. Newtons Lösung des sogenannten direkten Problems, das ist die Bestimmung der Kraft aus der Bahn eines Körpers, ergibt unter der Annahme, daß die (Zentripetal-)Kraft von einem Brennpunkt

[3] Keines dieser Gesetze wurde von Newton aufgestellt; jedes ist auf Vorläufer zurückführbar. Bloß ihre Auswahl und der Universalitätsanspruch ist sein Verdienst. Hingegen ist jedes der drei Keplerschen Gesetze von Kepler entdeckt worden.

ausgeht, für Ellipsenbahnen eine Kraft, die indirekt proportional zum Abstandsquadrat ist (Buch I, Proposition XI). Dabei sind ein breites Wissen über die Eigenschaften der Bahnkurven (im Beispiel die Ellipsen, die in der Antike durch Apolonius von Perga intensiv untersucht wurden) und eine Intuition für die zu verwendenden Proportionen erforderlich. Bis heute gibt es eine Diskussion darüber, ob Newtons Corollar 1 zu Prop. XIII (Buch I) eine vollständige Lösung des sogenannten inversen Problems, d.i. die Bestimmung der Bahn für eine gegebene Kraft, im Falle der $1/r^2$-Kraft ist.

Die Themen des zweiten Buches sind die Bewegung im widerstrebenden Medium und die Bewegung von Flüssigkeiten. Die Bewegung von Körpern behandelt u.a. die Wurfbewegung (Widerstandskraft proportional zur Geschwindigkeit und proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit) und die Pendelbewegung im widerstrebenden Medium. Bei der Diskussion von Flüssigkeiten, bestehend aus kleinen Teilchen, untersucht Newton z.B. den Widerstand den eine bewegte Kugel in einer solchen (ruhenden) Flüssigkeit erfährt, die Wellenbewegung und die kreisförmige Bewegung von Flüssigkeiten. Dieses letzte Thema ist offensichtlich eine Reaktion auf die Descartes Wirbeltheorie.

Das dritte Buch versucht mit Hilfe des Gravitationsgesetzes das Weltsystem zu erklären: Es behandelt die Bewegungen der Planeten[4] und ihrer Monde. Nach einigen Tatsachen über die Verhältnisse der Planeten, unter anderem der 3 Keplerschen Gesetze, wobei er nur beim dritten Kepler erwähnt, beweist Newton - unter Verwendung früherer Resultate – das $1/r^2$-Verhalten der Gravitationskraft (Vermutungen über eine $1/r^2$-Abhängigkeit gab es schon früher). Außerdem zeigt er die Proportionalität der Kraft zu den beteiligten Massen (Buch III, Proposition VII). Bei der Bewegung der Planeten wird die Sonne als Kraftzentrum für alle Planeten betrachtet und die Gravitationskraft zwischen den Planeten zunächst außer acht gelassen. Newton stellt bewußt nur die mathematische Form der Kraft fest, ohne auf die Art und Weise der (instantanen) Vermittlung einzugehen. Diese instantane Wirkung über beliebige Entfernungen entsprach zwar nicht seiner Vorstellung, sie war aber das Resultat seiner Analyse der Bahnen. "... Für uns ist es genug, daß Gravitation wirklich existiert und gemäß den Gesetzen wirkt, wie wir erklärt haben ..." (Scholium generale der Principia). Über die Wechselwirkung zweier Körper hinausgehend, berücksichtigt Newton in seiner Theorie des Mondes als Trabant der Erde näherungsweise auch den Einfluß der Sonne; er versucht damit erstmals ein sogenanntes Dreikörperproblem zu lösen.

Für viele Zeitgenossen war die mathematische Philosophie Newtons unbefriedigend. Im Vergleich von z.B. Descartes erschien ihnen der Erklärungsgehalt der Gravitation zu gering (vgl. die Dissertation von K. Nick, Kontinentale Gegenmodelle zu Newtons Gravitationstheorie, Frankfurt 2001, über die Gravitationstheorien von Leibniz, Joh. Bernoulli, D. Bernoulli, Huygens und Euler).

2 Reaktionen auf die Principia

Das Werk Newtons rief vielerlei Reaktionen hervor. Die neue mathematische Philosophie war noch lange Gegenstand von philosophischen Kontroversen. Parallel dazu verlief die mathematisch-physikalische Entwicklung der Mechanik: In England wurde ca. 100 Jahre lang noch die Fluxionenrechnung hoch gehalten und auf Themen aus den Principia angewendet (u.a. Gregory, Cotes, Maclaurin; vgl. [Guicciardini]). Auf dem Kontinent wurde

[4]In ihrer Ausgabe der Principia bekennen LeSeur und Jacquier vor dem dritten Buch in einer 'Declaratio', daß sie die von den Päpsten erlassenen Dekrete gegen die Bewegung der Erde befolgen!

die Principia in den beiden Zentren Basel und Paris mit der Leibnizschen Infinitesimalrechnung in analytischer Form behandelt und weitergeführt.

2.1 Zur Newtonschen Philosophie

Speziell die beiden Fragen des leeren Raums und der Vermittlung der Kräfte trennen die Anhänger der neuen mathematischen Philosophie Newtons von jenen der Descartesschen Prinzipien: Gibt es den leeren, absoluten Raum? Wie wird die Kraftwirkung von einem Körper auf einen anderen übertragen? Descartes Raum ist untrennbar mit Materie verknüpft, wo keine Materie, dort kein Raum. Die Wirkungen von Körpern werden nur über umgebende Materie durch Kontakte (Stöße!) vermittelt. Newton kennt hingegen den absoluten Raum, ein Vakuum muß es geben (Buch III, Prop. VI, Cor 4). Ein wenig mehr von Newtons Vakuumsvorstellung kann man in den Queries der 1704 erstmals erschienenen Opticks finden (I. Newton, Opticks, Dover, New York 1979; s. Query 18 und 20). Unter den Anhängern der Philosophie Newtons erwähne ich nur drei: Voltaire, Maclaurin, Kant, wobei Kants Vorstellungen über die Kosmogonie eine nachhaltigere Wirkung hatten.

Eher als Schriftsteller und Philosoph bekannt, gibt F. Voltaire (1694-1778) in 'The Elements of Sir Isaac Newton's Philosophy' (1738) eine fachlich kompetente Darstellung von Newtons Opticks und Principia. Seine schriftstellerische Fähigkeit zeigt er gleich zu Beginn in der Widmung an die Marquise du Châtelet. Die ersten vierzehn Kapitel (von 25) behandeln Licht und Vorgänge mit Licht (Reflexion, Beugung, Licht und Auge, Lupe, Teleskop, Lichtfarben, Regenbogen). Ab Kapitel XV widmet sich Voltaire der Gravitation und dem Planetensystem. Dabei wird auch die Descartessche Wirbeltheorie und die Konzeption eines mit Materie erfüllten Raumes widerlegt (Kap. XVI).

Die Abhandlung 'An Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries' (1748) des schottischen Mathematikers C. Maclaurin (1698 - 1746) gliedert sich in vier Bücher. Das erste enthält eine teilweise sehr emotionelle Ablehnung der philosophischen Vorstellungen von Descartes (und Spinozas); auch Leibniz kommt nicht gut weg. Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der Newtonschen Mechanik (Bewegung allgemein, Stöße und Pendel) und das dritte und vierte mit seiner Gravitationstheorie und den Konsequenzen für das Sonnensystem.

I. Kants (1724-1804) 'Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels' (1755) versucht "das ganze Weltgebäude mechanisch nach Newtonschen Grundsätzen" [Kant] zu behandeln. Mit Mathematik und Physik vertraut – Kant gab Vorlesungen über Physik – und inspiriert durch die Newtonschen Principia, entwickelte er seine Theorie des Himmels. Auch wenn Kant "seiner erfinderischen Phantasie keinen Schritt über die Grenze hinaus gestattet hat, die von der nüchternen wissenschaftlich-kritischen Überlegung gezogen wird" [Lampa], so scheint mir dieses Urteil eher auf Laplace zuzutreffen. Im dritten Teil seiner Naturgeschichte stellt Kant sogar die Hypothese auf, daß es Bewohner auf anderen Planeten gibt: "Indessen sind doch die meisten unter den Planeten gewiss bewohnt, und die die es nicht sind, werden es dereinst werden." Kants Naturgeschichte hat – wie Laplaces Betrachtungen über das Weltsystem – eine Bedeutung für die Kosmogonie: Sie enthält die ersten Hypothesen über die Entstehung des Universums auf der Basis von Newtons Principia. Später, 1786, beschäftigte sich Kant noch einmal in den 'Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaften' mit der Newtonsche Physik.

2.2 Kommentare, Übersetzungen der Principia

Im 18. Jahrhundert wurde Newtons Principia nur zweimal übersetzt: 1729 von A. Motte ins Englische und 1759 von der Marquise du Châtelet ins Französische. Die Châteletschen Ausgabe ist mit Erläuterungen und Kommentaren versehen, die interessante Aufschlüsse über die Auffassungen und Nachwirkungen der Principia geben. Diese Zusätze bestehen aus zwei Teilen: Einer kurzen Zusammenstellung des Systems der Welt (Geschichtliches, über die Planeten, Newtons Theorie der Planeten, die Gestalt der Erde, die Gezeiten, Newtons Erklärung der Phänomene der Monde, von den Kometen) und der analytischen Behandlungen von Problemen, die bei der Behandlung des Weltsystems auftreten (u.a. Bestimmung der Bahn in Zentralkräften, die Anziehung ausgedehnter Körper, die Gestalt der Erde, Gezeiten).

Eine durch Kommentare aufs doppelte Volumen angewachsene Ausgabe der dritten Auflage der Principia gaben die beiden Mönche T. LeSeur und F. Jacquier in den Jahren 1739-42 heraus. Sie enthält zusätzlich drei Arbeiten von D. Bernoulli, Maclaurin und Euler über die Gezeiten. Wegen der Kommentare ist diese Ausgabe eine wertvolle Quelle für Arbeiten über die Geschichte der Mechanik.

2.3 Nachfolgewerke zur Mechanik und Astronomie

Von den zahlreichen Nachfolgewerken zu Newtons Principia erwähne ich nur zwei:

Die 'Astronomiae Physicae & Geometricae Elementa' (1702; engl. Ausgabe: The elements of Physical and Geometrical Astronomy) von D. Gregory schließt an das dritte Buch der Principia an. In sechs Büchern werden u.a. folgende Themen behandelt: die Planeten, die Gravitation, die beobachtete Bewegung (u.a. Tierkreis, Parallaxe), die Theorie (der Bewegung) der Planeten, Kometenbahnen. Weiters sind darin enthalten: ein Abschnitt mit Newtons Mondtheorie ("a short account of ... corrections concerning the Moon's motion", im Scholium zur Proposition XXIX des 4. Buches, Vol II, p. 563) und ein Anhang von Halley über Kometen: 'A Synopsis of the Astronomy of Comets'.

Die später näher vorgestellte 'Phoronomia' (1716) von J. Hermann entspringt dem ersten und zweiten Buch der Principia.

3 Punkte gegen d's ($\dot{x}$ vs. dx/dt)

Wesentlich für die Entwicklung der analytischen Mechanik scheint die Verwendung des Leibnizschen Differentialkalküls gewesen zu sein. Der Prioritätenstreit über die Infinitesimalrechnung zwischen Newton und Leibniz ist sattsam bekannt; nur die Leibnizsche Form hat die Zeit überdauert.

Die Fluxionen und Fluenten Newtons sind eng mit geometrischen Vorstellungen und Bewegung verknüpft. Sie sind in England verbreitet und werden zu Newtons Lebzeit von ihm 'kontrolliert'. Prominente Verfechter sind Maclaurin[5], Cotes, Wallis und Robins. Leibniz's Differential- und Integralrechnung ist formaler und sehr geeignet für eine Algorithmisierung; geometrische Vorstellungen sind nicht unbedingt erforderlich. Die kontinentalen Zentren sind Paris mit L'Hospital und Varignon, sowie Basel mit den Bernoullis (Johann, Jakob, Daniel), Euler und Hermann.

[5] In seiner Gezeitentheorie – zumindest in der im dritten Band der LeSeur-Ausgabe abgedruckten Version – verwendet er allerdings die Leibnizsche Schreibweise.

Wie schon erwähnt, sind in den Rechnungen der Principia kein Fluxionen und Fluenten zu finden[6]. Die ersten Anwendungen der Fluxionen in der Mechanik sind in Werken über Fluxionen enthalten (z.B. Hayes (1704), Emerson (1743); s. [Guicciardini]). Unter den ersten Anwendungen der Differentialrechnung sind zu erwähnen: Leibniz's Bewegung eines Projektils im widerstrebenden Medium (1689), die im Folgenden besprochenen Arbeiten von Varignon (ab 1700) und die Lösungen des inversen Problems[7] von Joh. Bernoulli und Hermann (beide 1710). Auch in der 'Phoronomia' von Hermann (s. unten) wird die Leibnizsche Differentialrechnung verwendet.

4 Die Entwicklung der analytischen Mechanik

4.1 Pierre Varignon (1654-1722)

P. Varignon[8] dürfte der erste gewesen sein, der mit Hilfe des Leibnizschen Kalküls allgemeine Bewegungsgleichungen formulierte (s. dazu auch [Blay], [Guicciardini], [Fleckenstein] und [Costabel]). Er hatte die Leibnizsche Version dieser neuen Mathematik durch die Teilnahme an Johann Bernoullis Unterweisungen für L'Hospital gelernt. Auch wenn ihn Costabel wiederholt als zweitrangig bezeichnet, ist seine Rolle bei der Entstehung der analytischen Mechanik nicht unerheblich. Er hatte bereits 1687 ein Werk über Statik ('Projet d'une nouvelle méchanique') veröffentlicht. Ab 1692 sind in den Memoires de l'Academie royale des Sciences, Paris, Mitteilungen von Varignon über die Gesetze der Bewegung zu finden. Die Vorgangsweise in den ersten Beiträgen (1692-93) ist noch recht umständlich; es werden in vielerlei Varianten Proportionen zwischen den für die Bewegung maßgeblichen Größen aufgezeigt und ausgewertet. Dann, im Jahr 1700, erschienen die drei Mitteilungen

- *Manière générale de déterminer les forces, les vîtesses, les espaces, & les tems, une seule de ces quatre choses étant donnée dans toutes sortes de mouvemens rectilignes variés à discrétion*, Mém. Paris 1700, pp. 22-27
- *Du mouvement en général par toutes sortes de courbes; & des forces centrales, tant centrifuges, que centripetes, nécessaires aux corps qui les décrivent*, Mém. Paris 1700, pp. 83-101
- *Des forces centrales, ou des pesanteurs necessaires aux planetes pour leur faire décrire les orbes qu'on leur a supposés jusqu'icy*, Mém. Paris 1700, pp. 224-243

[6]Ganz stimmt dies nicht. Am Anfang des ersten Buches, in Abschnitt I über "die ersten und letzten Verhältnisse", stehen elf Lemmata, welche Eigenschaften von verschwindenden Größen und Relationen zwischen solchen behandeln, die für die weiteren Rechnungen wichtig sind. Genau an dieser Stelle erwähnen LeSeur und Jacquier in ihren Kommentaren die Fluxionen und Fluenten und geben eine kurze aber umfassende Einführung in die Newtonsche und Leibnizsche Variante, wobei sie letzten Endes die Leibnizsche Schreibweise und die Newtonsche Namen wählen ([Newton, (LeSeur)] p. 86 ff; anstelle unseres heutigen Integralzeichens $\int$ steht noch das S).

[7]Schon 1708 hatte Keill das inverse Problem mittels Fluxionen gelöst (N. Guicciardini, Annals of Science, **52**,537(1995)).

[8]Varignons Beiträge zur Dynamik sind heute ziemlich in Vergessenheit geraten. Aber noch von LeSeur und Jacquier (p. 109) wird er zusammen mit Joh. Bernoulli und Hermann in einer Anmerkung zur Proposition VI des ersten Buches erwähnt und als herausragend bezeichnet. Hervorgehoben werden seine 'Pariser Kommentare' aus den Jahren 1700, 1701 und 1706, die Mitteilungen von Joh. Bernoulli an die Pariser Akademie im Jahr 1710 und zwei Beziehungen von Hermann im Scholium zur Proposition XXII im ersten Buch seiner 'Phoronomia'.

Ein Verzeichnis der Arbeiten Varignons kann man in [Speiser] finden.

denen ich mich jetzt zuwende.

In der ersten Mitteilung, im Januar 1700, über die lineare Bewegung, leitet Varignon zwei allgemeine Regeln ab, welche die Wegstrecke x, die Geschwindigkeit v und die Kraft y in Beziehung setzen:

1. Regel:
$$v = \frac{dx}{dt}.$$
Diese Regel erscheint heute selbstverständlich; sie hat aber mit Varignons Konzepten *Geschwindigkeit* bzw. *Kraft in jedem Zeitpunkt* zu tun [Blay]. Bei Leibniz tritt diese Regel schon vorher als *allgemeines Prinzip* auf [Blay].

2. Regel:
$$y = \frac{dv}{dt} \left(= \frac{d^2x}{dt^2} \right).$$
Dies ist die erste allgemeine, analytische Gleichung der Bewegung[9]! Diese allgemeine Regel zusammen mit dem formalen, leicht algorithmisierbaren Leibnizschen Differentialkalkül scheint mir der Grund für die Durchsetzungskraft der 'kontinentalen' Mechanik zu sein.

Varignon wendet diese Regeln ziemlich umständlich auf einige Fälle an. Einer davon ist die Galileische Beziehung für den freien Fall, daß die Quadrate der Geschwindigkeiten proportional zur Fallhöhe x sind:
$$x = v^2.$$
Die Essenz der Varignonschen Rechnung: Aus Regel 1 folgt damit $\sqrt{x} = dx/dt$ oder
$$x = t^2/4.$$
Regel 2 ergibt nun
$$y = \frac{1}{2},$$
die Kraft ist also konstant (eigentlich $= g/2$; die Konstante wird, wie übrigens auch die Masse, häufig Eins gesetzt). Er merkt auch an, daß sich aus den beiden Regeln eine allgemeine Lösung ergibt, denn aus
$$dt = \frac{dx}{v} = \frac{dv}{y},$$
d.h.
$$ydx = vdv,$$

[9] Ohne eine Erwähnung früherer Arbeiten oder der Principia leitet Varignon diese Regel her:
Sei dx die Strecke, welche mit gleichmäßiger Geschwindigkeit v (in einem Moment dt) zurückgelegt wird und sei ddx $\left(= d^2x\right)$ die Zunahme der Strecke, die von der Zunahme der Geschwindigkeit dv (in diesem Moment dt) herrührt, d.h. $ddx = dvdt$. Nun setzt sich für einen Körper, der von einer Kraft y bewegt wird, die zusätzlich zurückgelegte Strecke ddx zusammen aus der Kraft und dem Quadrat des Zeitmoments dt (hier fehlt der Verweis auf das zweite Gesetz, $dv = ydt$, oder z.B. auf Buch I, Axiome, Scholium zu Corollar VI), d.h.
$$ddx = ydt^2.$$
Daraus folgt die zweite Regel.

folgt schließlich

$$\int ydx = \frac{v^2}{2};$$

dies ist Varignons Lösung von Newtons Proposition XXXIX in Buch I, in der verlangt wird die Geschwindigkeit eines Körpers, der unter dem Einfluß einer gegebenen Zentripetalkraft entlang einer geraden Linie auf- oder absteigt, zu bestimmen. Im ihrem Kommentar zu dieser Proposition erwähnen LeSeur und Jacquier ausführlich diese Arbeit und die beiden Regeln Varignons ([Newton, (LeSeur)], Buch I, p. 310).

In der zweiten Mitteilung vom März 1700 widmet sich Varignon der Bewegung entlang einer gekrümmten Linie, verursacht durch eine Zentralkraft[10]. Mit der Bogenlänge s entlang der Bahn lautet nunmehr die 1. Regel

$$v = \frac{ds}{dt},$$

und als zweite Regel hat man[11]

$$y = \frac{dsdds}{dxdt^2} \left(= \frac{vdv}{dx} \right),$$

wobei y die Zentralkraft ist und die Variable x die Veränderung des radialen Abstandes bei der Bewegung entlang der Bahn angibt; genauer gilt: $x = a - r$, wo a der radiale Abstand des Körpers vom Kraftzentrum in einem willkürlich gewählten Punkt der Bahn und r die Radialkoordinate der momentanen Position des Körpers ist (d.h. es gilt: $dx = -dr$). Zusätzlich zu den Regeln benützt Varignon den Flächensatz in der Form[12]

$$rdz = dt$$

um die Zeit mit den Bahngrößen in Verbindung zu setzen.

Wir erwähnen hier nur seine Bestimmung der Kraft auf einen Körper, der eine elliptischen Bahn ALB beschreibt, wobei das Kraftzentrum das Zentrum C der Ellipse ist (vgl. die Abbildung). Der Körper befindet sich momentan in L und bewegt sich nach l weiter. Dabei bestehen die Beziehungen (vgl. Abb.): $AB = 2a$, $AH = x$, $CL = r$, $AL = s$,

---

[10]Es scheint, daß Varignon die Bezeichnung Zentralkraft (force centrale) als erster verwendet hat [Fleckenstein].

[11]Der Faktor ds/dx kommt von der Projektion der radial gerichteten Kraft (in x- bzw. r-Richtung) auf die Bahn, d.h. auf ds.

In moderner mathematischer Sprache kann man diese Beziehung leicht erkennen (s. [Blay], p. 199): Multipliziert man die Bewegungsgleichung (vgl. Abschnitt Euler; $d\vec{v}/dt = d^2\vec{x}/dt^2$)

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

mit $d\vec{x}$ erhält man:

$$\vec{F}d\vec{x} = m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{x} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = m\vec{v}d\vec{v}.$$

Wenn $d\vec{x}$ radial gerichtet ist, dann gilt

$$\vec{F}d\vec{x} = F_r dr$$

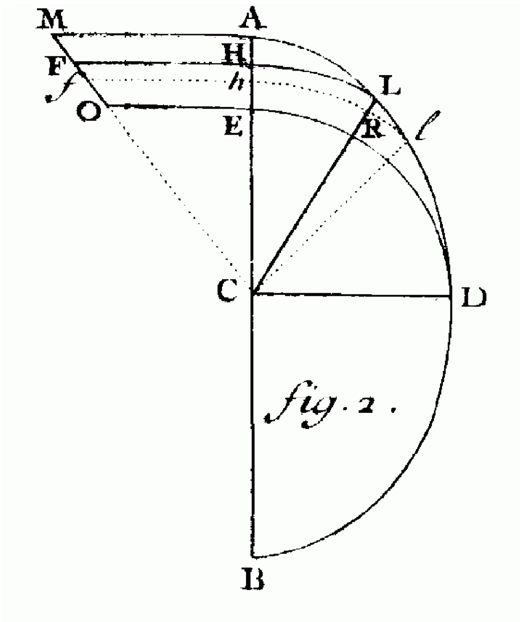
(F_r ist die Radialkomponente von $\vec{F}$) und man findet so Varignons Regel 2.

[12]Varignon bezieht sich dabei auf Proposition II im ersten Buch der Principia. Das zweite Keplersche Gesetz ist eine Form des Flächensatzes. Hinweis für mathematisch Versierte: $dz = \sqrt{ds^2 - dr^2}$ (Pythagoras) und in Polarkoordinaten gilt $dz = rd\varphi$.

$Hh = dx$, $Rl = dz$, $RL = dr$ und $Ll = ds$. Nach einigem Rechenaufwand folgt mit den beiden Regeln aus der Gleichung der Ellipse für die Kraft die Beziehung[13]

$$y \propto r,$$

die Kraft ist also proportional zum Abstand vom Kraftzentrum.



In der dritten Mitteilung vom November 1700 bestimmt Varignon mittels dieser Regeln die Kraft im Keplerschen Fall (direktes Problem, Kraftzentrum in einem Brennpunkt(!) der Ellipse):

$$y \propto \frac{1}{r^2},$$

also das Newtonsche Gravitationsgesetz.

4.2 Jacob Hermann (1678-1733)

Seine 'Phoronomia' (1716) ist das erste Werk über Mechanik auf dem Kontinent unter Verwendung der Leibnizschen Infinitesimalrechnung mit einer deutlichen Betonung von Flüssigkeiten. Obwohl Hermann sich auf (unendlich) kleine Größen bezieht, benützt er hauptsächlich, wie Newton, die Berechnung mittels Proportionen und verwendet nur selten Differentialgleichungen. Häufig verweist er auf Varignon und Joh. Bernoulli. Die Einleitung und die Definitionen der Begriffe stehen deutlich hinter jenen Newtons zurück. Das Buch ist sowohl was die Methode als auch den Inhalt betrifft ein Rückschritt zu Varignons Arbeiten und ist weit entfernt von Eulers Werk. Eulers Urteil: Hermann hat "alles nach Art der Alten mittelst synthetischer geometrischer Beweise behandelt und die Analysis, durch welche man zu einer vollständigen Erkenntnis dieser Dinge gelangt, nicht angewandt" (Vorrede zu [Euler], 'Mechanica ...', p. 3).

[13]Eine Ableitung in moderner mathematischer Sprache ([Blay], p. 202) geht von der Ellipsengleichung in Polarkoordinaten r und φ aus:

$$\frac{b^2}{r^2} = 1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2 \varphi.$$

Das erste Buch behandelt Kräfte und die Bewegung von Körpern. In ihm findet man allgemeine Überlegungen über Kräfte und die von ihnen hervorgerufen Bewegung im Vakuum (Sectio II, Caput I). Dort gibt Hermann die Grundgleichung der Bewegung an, ohne auf Varignon zu verweisen. Ein Körper (Masse m, Geschwindigkeit $u = dx/dt$) bewegt sich unter dem Einfluß einer Kraft g gemäß (§ 145)

$$dt = mdu : g.$$

Er analysiert damit auch den Galileischen Fall, die Bewegung in einer konstanten Gravitationskraft g (§ 150) und findet (§ 152, s ist die Distanz)

$$s = \frac{g}{2}t^2.$$

Kapitel II beschäftigt sich mit der krummlinigen Bewegung im Vakuum, hervorgerufen durch eine Gravitationskraft. Im § 159 leitet Hermann für elliptische und hyperbolische Bahnen das $1/r^2$- Gesetz der Gravitation her. Außer der Besprechung der elliptischen Bahn (p. 95) bei einer gravitativen "solicitatio" (Kraftwirkung)[14], wird auf die Planetenbewegung und das Weltsystem nicht weiter eingegangen. Er beweist als erster den Flächensatz für Zentralkräfte analytisch (pp. 69-71; s. auch [Guicciarini], p. 211). Kapitel III widmet sich dem Isochronenproblem (d.i. die Unabhängigkeit der Umlaufszeit oder der Periode von der Amplitude) und dem Pendel. Kapitel IV enthält Zentralkräfte und die Bewegung der Apsiden, Kapitel V behandelt das zusammengesetzte Pendel. Im letzten Teil des ersten Buches, in Kapitel VI, untersucht Hermann die Stoßgesetze[15].

Das umfangreichere zweite Buch behandelt, wie jenes der Principia, die Bewegung in Flüssigkeiten sowie die Bewegung von Flüssigkeiten selbst.

4.3 Leonhard Euler (1707-1783)

Eulers erste Mechanik

Die erste umfassende analytische Behandlung der Dynamik eines Körpers ist Eulers 'Mechanica sive Motus Scientia Analytice exposita' (1736; deutsche Übersetzung von Wolfers 1848/50). In der Vorrede bezieht sich Euler u.a. auf Varignon und Hermann als Vorgänger, bei Varignon merkwürdigerweise nur auf dessen Beiträge zur Statik, zum Gleichgewicht von Kräften ('Projet d'une nouvelle Méchanique'). Hermanns 'Phoronomia' hingegen ist für Euler das erste Werk, "in welchem die Lehre von der Bewegung für sich allein, und mit so großen Erfindungen bereichert, abgehandelt" worden ist (Vorrede, p. 2). Euler führt das Konzept eines Massenpunktes ein[16]; er ist der Ansicht, daß "die Bewegung der Körper von endlicher Größe nicht erklärt werden [kann], wenn man nicht zuvor die Bewegung von Punkten, aus denen man sich die Körper zusammengesetzt denken muss, sorgfältig untersucht hat." (loc. cit., p. 4)

In seiner ersten Mechanik zerlegt Euler die Kräfte, einschließlich der Trägheitskraft, in Komponenten tangential und normal zur instantanen Bewegungsrichtung. Die erste

[14]Hermann unterscheidet zwischen einer vis viva, kurz vis, die (der Änderung) der Bewegungsgröße entspricht, und einer vis mortua, oder solicitatio, d.h. einer Erregung, eben z.B. der Gravitation.

[15]Bereits Descartes untersuchte Stöße (Principia philosophiae, 2. Teil, § 40ff), kommt aber teilweise auf ein falsches Ergebnis. Huygens behandelte Stöße ausführlich in seinen beiden Abhandlungen 'The laws of motion on the collision of bodies' (1669) und 'Tractatus de motu corporum ex percussione' (1703).

[16]Einige Autoren (z.B. Truesdell, Szabo) bekämpfen, teils in irrationaler Weise, das Konzept des Massenpunktes, betonen aber Eulers Bedeutung für die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik. Anscheinend haben sie diese Vorrede nicht gelesen.

Kraftkomponente ändert den Betrag der Geschwindigkeit, die zweite bewirkt hauptsächlich eine Abweichung der Bewegung von der Geradlinigkeit. In Eulers Bezeichnung: Wenn die Kraft p in die Richtung der Bewegung des Teilchens mit Masse A und Geschwindigkeit c wirkt, dann gilt

$$dc \propto \frac{p}{A} dt$$

oder nach der Wahl der universellen Proportionalitätskonstante zu Eins:

$$A\frac{dc}{dt} = p.$$

Unter Verwendung dieser Bewegungsgleichung behandelt Euler die freie geradlinige und die krummlinige Bewegung im leeren Raum sowie im widerstrebenden Medium, die Bewegung entlang einer gegebenen Linie im leeren Raum und im widerstrebenden Medium, sowie die Bewegung auf einer Oberfläche. Seine Behandlung des inversen Problems in § 644 ff (p. 219, Vol. 1) ist bereits in moderner Mathematik formuliert. Das Werk enthält eine große Menge an Differentialgleichungen und Integralen, viele davon vermutlich zum ersten Mal.

Eulers zweite Mechanik

Eulers 'zweite Mechanik', die 'Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum' aus dem Jahr 1765 macht bewußt, daß bis dahin nur die Translationsbewegung von Körpern betrachtet wurde[17]. Der große Schritt in der Entwicklung der Mechanik ist die Behandlung der Bewegung von starren Körpern einschließlich ihrer Rotationsbewegung (Eulersche Kreiselgleichungen).

Bevor aber Euler die Bewegungsgleichungen für einen starren Körper entwickelt, faßt er die Bewegung von Punktmassen in 6 Kapiteln kurz zusammen. Er betrachtet zunächst Allgemeines über die Bewegung, dann die Trägheit und die gleichförmige Bewegung und schließlich die Kräfte als Verursacher von Bewegungsänderungen. Die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes (einer kleinen Masse) wird – das ist neu gegenüber der ersten Mechanik – in kartesische Komponenten zerlegt[18] (§ 176):

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}; \quad \text{II. } \frac{ddy}{dt^2} = \frac{\lambda q}{A}; \quad \text{III. } \frac{ddz}{dt^2} = \frac{\lambda r}{A}.$$

p, q, r sind die Kräfte entlang der fest gewählten Achsen, A ist die Masse und λ ist eine Konstante, welche in geeigneten Einheiten gleich Eins ist. Die heute übliche Schreibweise der drei Gleichungen lautet:

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F};$$

hier ist m die Masse, $\vec{x}$ der Ortsvektor (er gibt die Position des Körpers an) und $\vec{F}$ der Kraftvektor[19]. Danach wendet Euler die Gleichungen auf die Bewegung kleiner Körper an,

[17] Dies rechtfertigt auch das Konzept des Massenpunktes als Repräsentant eines Körpers endlicher Größe ohne Rotation.

[18] Laut Lagrange ist Maclaurin in seinem "A Treatise of Fluxions" 1742 der erste gewesen, der die Gleichungen auf ein festes Koordinatensystem bezog. Simonyi schreibt diese Rolle Euler zu und gibt dabei als Quelle Eulers 'Découverte d'un nouveau principe de Mécanique' (1750) an. E. Fellmann nennt in seiner Euler-Biographie (rororo-Monographie, Reinbek bei Hamburg 1995) auch Euler als Urheber, allerdings erst 1765 mit seiner zweiten Mechanik. Mach wiederum nennt Maclaurin als Urheber dieser Gleichungen.

[19] Vektoren sind Größen mit drei Komponenten: $\vec{x} = (x, y, z)$, $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (p, q, r)$

d.h. er betrachtet nur die Translationsbewegungen; er bestimmt u.a. die Zentrifugalkraft und bringt sie mit dem Zwang sich gegen die natürliche, geradlinige Bewegung auf einer gekrümmten Bahn bewegen zu müssen in Zusammenhang (§ 213).

Im Hauptteil seiner zweiten Mechanik bewältigt Euler das zentrale Thema, die Bewegung starrer Körper. Ein starrer Körper ist dadurch charakterisiert, daß alle seine Punkte stets in festen, gegenseitigen Abständen bleiben (§ 264). Zu den Eigenschaften eines starren Körpers bezüglich der Einwirkung von Kräften gehört zusätzlich zu seiner Masse und dem Massenzentrum sein Trägheitsmoment[20]. Zunächst widmet sich Euler der Bestimmung des Trägheitsmoments. Dann, ausgehend von der einfachen Rotation eines Körpers um eine feste Achse, erhöht er den Komplexitätsgrad der Rotationsbewegung. Schließlich finden wir in Kapitel XV die berühmten Eulerschen Kreiselgleichungen, die in ihrer ursprünglichen Form lauten:

$$\begin{aligned} dx + \frac{c^2-b^2}{a^2} yzdt &= \frac{2gPdt}{Ma^2} \\ dy + \frac{a^2-c^2}{b^2} xzdt &= \frac{2gQdt}{Mb^2} \\ dz + \frac{b^2-a^2}{c^2} xydt &= \frac{2gRdt}{Mc^2}; \end{aligned}$$

x, y, z sind die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit (d.i. die Drehgeschwindigkeit), P, Q, R sind die Komponenten des Drehmoments der Kraft und Ma^2, Mb^2, Mc^2 sind die sogenannten Hauptträgheitsmomente (welche den Widerstand gegenüber Änderungen der Drehbewegung angeben); alle Größen sind im mitrotierenden Koordinatensystem der Hauptträgheitsachsen definiert. Diese Gleichungen sind die Grundlage für die Beschreibung der Rotationsbewegung von starren Körpern (Kreiseln).

4.4 Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Die Synthese unterschiedlicher Ansätze der Mechanik glückte Lagrange in seiner 'Mécanique analytique' (1788). Aufbauend auf den Prinzipien des dynamischen Gleichgewichts von d'Alembert ('Traité de Dynamique', 1743) und des Prinzips der geringsten Wirkung von Maupertuis ('Essai de cosmologie', 1750) entwickelt Lagrange einen neuen Zugang zu den Bewegungsgleichungen: Aus der heute als Lagrange-Funktion $L = T - V$ bezeichneten Größe, mit

$$V = -\int^r d\vec{x}\vec{F} \quad \text{und} \quad T = \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2,$$

erhält man die Bewegungsgleichung über die Vorschrift:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\,(d\vec{x}/dt)} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0.$$

Dieser Zugang zu den Gleichungen der Mechanik eröffnet ein neues Verständnis. Unter anderem kann man in der Lagrange-Funktion Symmetrien des mechanischen System (z.B. Rotationssysmmetrie) wesentlich leichter als direkt in den Bewegungsgleichungen dazu benützen, die Gleichungen zu vereinfachen und so leichter zu lösen. Lagranges Werk

[20]Huygens war der erste, der die Bedeutung des Trägheitsmomentes für die Bewegung von Körpern erkannte, ohne einen speziellen Namen dafür zu haben (zusammengesetztes Pendel in 'Horologium oscillatorium', Teil 4, Theorem 5).

stellt einen vorläufigen Höhepunkt in der Geschichte der analytischen Mechanik dar. In ihm befindet sich keine einzige Abbildung! Knapp und elegant ist seine Behandlung des inversen Problems ([Lagrange], p. 348 ff).

4.5 Pierre Simon Laplace (1749-1827)

Zwei Werke, welche an das dritte Buch der Principia anschließen, habe ich bereits vorgestellt: 'The elements of physical and geometrical astronomy' von D. Gregory und die 'Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels' Kants. Nur Kant geht in seiner Naturgeschichte über die Beschreibung des Weltsystems hinaus. Aber seine Thesen über die Entstehung des Weltsystems sind natürlich spekulativ. Sie finden ihre Parallele im letzten Kapitel von Laplaces 'Exposition du système du monde'. Der Hauptteil der Exposition ist eine exzellente, rein verbale Darstellung des Weltsystems, die sich auf Berechnungen stützt, die Laplace bald darauf in der Himmelsmechanik veröffentlicht hat. Nur das letzte Kapitel enthält Vermutungen und Hypothesen zur Kosmogonie. Dennoch – zu unterschiedlich sind die Werke Kants und Laplaces und ihre Hypothesen – gibt es den Begriff der Kant-Laplaceschen Theorie des Weltsystems (z.B. [Lampa]). Weder Kant noch Laplace benötigen einen Gott um den Gang des Weltsystems aufrecht zu erhalten, während Newton, aufgrund von nicht erklärten Anomalien der Planetenbewegung der Meinung war, daß Gott noch ab und zu eingreifen muß, um die Regelmäßigkeit der Bewegung zu gewährleisten (vgl. Newtons Scholium generale zum Schluß der Principia). Erst Laplace gelang eine Berechnung dieser Anomalien, die dabei ihre Unabwägbarkeit für die Stabilität der Bewegung der Planeten verloren. Die Hypothese "Gott" braucht Laplace nicht mehr[21] (s. R. Sexl, Was die Welt zusammenhält, DVA, Stuttgart 1982)).

Laplaces große Leistung ist sein 'Traité de mécanique céleste', eine umfassende Erklärung des Weltsystems. Diese Himmelsmechanik besteht aus fünf Bänden, die innerhalb von fast dreißig Jahren, von 1799 bis 1825, veröffentlicht worden sind. Die konsequente Anwendung der Bewegungsgesetze zusammen mit dem Gravitationsgesetz führt auf eine wesentliche Verfeinerung und Erweiterung des dritten Buches der Newtonschen Principia. Dabei werden viele Einflüsse auf die Planetenbewegung erfaßt und berücksichtigt. Einiges aus dem reichen Inhalt: Ebbe und Flut, die Gestalt rotierender Flüssigkeiten, Theorie der Saturnringe, Entwicklung eines systematischen Näherungsverfahrens, Einfluß der nichtkugelförmigen Sonnengestalt, Einfluß eines interstellaren Mediums, Einfluß einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation, Theorie der Kometen, Lichtbeugung und -absorption, Kapillarität.

Das kosmische Uhrwerk

Bei vielen Berechnungen mußte Laplace Näherungen verwenden, die von reduzierten, exakt lösbaren Situationen ausgehen; er fand daher keine Nichtvorhersagbarkeit der Bewegung. So ist es nicht verwunderlich, daß Laplace der Meinung war (wie übrigens schon Kepler), daß das Weltsystem wie ein Uhrwerk funktioniere (vgl. [Iro]). Dieses mechanistische Bild des Kosmos wurde durch Laplace auf den Punkt gebracht, als er sinngemäß schrieb ('Essai philosophique sur les probabilités', 1814; deutsch: Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit, Ostwalds Klassiker Band 233, Harri Deutsch, Thun 1998):

> Für ein Wesen mit ausreichender Einsicht ist aus den genauen Daten des jetzigen Zustandes des Weltalls die Zukunft berechen- und vorhersagbar.

[21] Allerdings hat Laplace gewisse auffallende Eigenschaften des Planetensystems auch nicht erklärt.

Am Ende des 19. Jahrhunderts schien somit die Welt 'gelöst' zu sein.

Einwände gegen diese Auffassung wurden erstmals um 1900 von H. Poincaré erhoben. Er hatte aber noch nicht die mathematischen Mittel um seinen Zweifel zu untermauern. Einen ersten Hinweis dafür lieferte 1963 E. Lorenz mit dem Einsatz einer Rechenmaschine zur Lösung von nichtlinearen, analytisch nicht lösbaren Differentialgleichungen für ein vereinfachtes Wettermodell, in denen klare Anzeichen von Unvorhersagbarkeit auftraten. Auch bei der Bewegung im Kosmos handelt es sich um nichtlineare Differentialgleichungen, die nicht analytisch exakt gelöst werden können. Numerische Verfahren zeigen auch hier, daß ein nichtvorhersagbares, 'chaotisches' Verhalten auftreten kann.

Nachwort

Ich hoffe eine auch allgemein verständliche Darstellung einer wesentlichen, wenn nicht sogar der wesentlichsten Epoche der Entwicklung der Physik gegeben zu haben.

Der Stadt Peuerbach, Dr. F. Samhaber und den wissenschaftlichen Leitern der Tagung, Prof. F. Pichler und Prof. M. von Renteln, danke ich für die Einladung zu diesem Symposium. Mein Kollege Prof. R. Folk unterstützte mich durch sein Interesse, zahlreiche Diskussionen und Anregungen.

Literatur

Blay M., La naissance de la mécanique analytique, Presses Universitaires de France, Vendôme 1992

Costabel P., Pierre Varignon et la diffusion en france du calcul différentiell et intégral, Université de Paris 1965

Descartes R., Principia philosophiae, Amsterdam 1644; mit deutscher Übersetzung von C. Wohlers, F. Meiner Verlag, Hamburg 2005

Edwards C.H., The Historical Development of the Calculus, Springer, New York 1994

Euler L., Mechanica sive Motus Scientia Analytice exposita (1736), deutsche Übersetzung als 'Mechanik oder analytische Darstellung der Wissenschaft von der Bewegung', 1. u. 2. Teil mit Kommentar von J.Ph. Wolfers, 2 Bde, C.A. Koch, Greifswald 1848 und 1850

Euler L., Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum (1765), deutsche Übersetzung als 'Mechanik oder analytische Darstellung ...', 3. Teil mit Kommentar von J.Ph. Wolfers, C.A. Koch, Greifswald 1853

Fleckenstein J.O., Pierre Varignon und die mathematischen Wissenschaften im Zeitalter des Cartesianismus, Archives Internationales d'Histoire des Sciences, **5**,76(1948)

Gregory D., The Elements of Physical and Geometrical Astronomy, zweite Auflage, London 1726

Guicciardini N., Reading the Principia, Cambridge University Press, Cambrigde 1999

Hermann J., Phoronomia, Wetstenios, Amsterdam 1716

Iro H., A Modern Approach to Classiscal Mechanics, World Scientific, Singapore 2002

Kant I., Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels (1755), Wilhelm Engelmann, Leipzig 1898

Lagrange J.L., Analytische Mechanik, deutsche Übersetzung der 'Mécanique analytique' (1788) von H. Servus, Springer, Berlin 1887

Lampa A., Die Kant-Laplacesche Theorie, Österr. Bundesverlag, Wien 1925

Laplace P.-S., Celestial Mechanics (1829-1839), N. Bowditchs englische Übersetzung und Kommentar der Bde 1-4 des fünfbändigen 'Traité de mécanique céleste' (1799 -

1825), Nachdruck, Chelsea, Bronx (N.Y.) 1966
Laplace P.-S., Exposition du système du monde (1796), Nachdruck der Ausgabe von 1835, Fayard, Tours 1984
Mach E., Die Mechanik in ihrer Entwicklung – historisch kritisch dargestellt, F.A. Brockhaus, Leipzig 1912
Maclaurin C., An Account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries, London 1748, Faksimile, Georg Olms, Hildesheim 1971
Newton I., The Principia, übersetzt von A. Motte, Prometheus Books, New York 1995
Newton I., Mathematische Prinzipien der Naturlehre, übersetzt von J. Ph. Wolfers, Nachdruck der Auflage von 1872, Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt 1963
Newton I., Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, von T. LeSeur and F. Jacquier kommtierte Ausgabe der dritten Auflage von 1726, Genf 1739 - 1742
Newton I., Principia, Principes mathématiques de la philosophie naturelle, übersetzt und kommentiert von der Marquise du Châtelet, Paris 1759; Nachdruck, Dunod, Paris 2005
Newton I., A Treatise of the System of the World, Faksimile der 2. Auflage von 1731, Dover, Mineola (N.Y.) 2004
Newton I., Über die Gravitation..., Übersetzung eines Newton-Manuskripts von G. Böhme, Klostermann, Frankfurt 1988
Nick K.R., Kontinentale Gegenmodelle zu Newtons Gravitationstheorie, Ph. D. thesis, Frankfurt 2001
Pichler F. (Hrsg.), Von den Planetenbahnen zur Himmelsmechanik, Peuerbach Symposium 2004, Universitätsverlag Trauner, Linz 2004
Simonyi K., Kulturgeschichte der Physik, Harri Deutsch, Thun/Frankfurt am Main 1995
Speiser D. (ed.), Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli, Band 2: Der Briefwechsel mit Pierre Varignon, Erster Teil: 1692-1702, Birkhäuser, Basel 1988
Voltaire F.-M., The Elements of Sir Isaac Newton's Philosophy, Übersetzung aus dem Französischen, London 1738; Nachdruck Frank Cass & Co, London 1967.