1. Übung theoretische Physik I Institut für theoretische Physik, JKU Linz
WS 2008 Übungstermin: 10.10.2008

1. (a) Zeigen Sie folgende Beziehungen für den total antisymmetrischen Tensor ε_{ijk}:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} &= \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijm} &= 2\delta_{km} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} &= ?\end{aligned}$$

Hinweis: Gemäß Einstein'scher Summenkonvention ist über doppelt vorkommende Indices zu summieren. Benutzen Sie die Darstellung des ε-Tensors als Determinante:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{vmatrix} .$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Komponentenschreibweise folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= 0\,, \\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,, \\ \nabla\times\nabla V(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla\times\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \nabla\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r}) - \Delta\mathbf{A}(\mathbf{r})\,.\end{aligned}$$

Hierbei sind $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$, $V(\mathbf{r})$ ist ein Skalarfeld und $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ein Vektorfeld.

2. Gegeben sei die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ eines Massenpunktes der Masse m. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ und die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ in Kugelkoordinaten.

Hinweis: Die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten sind gegeben durch

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Berechnen Sie das Wegintegral der Funktion $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\,[\mathbf{E} + \mathbf{v}(\mathbf{r})\times\mathbf{B}]$ entlang einer Spirale entlang der z-Achse mit Radius a,

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ a\sin(t) \\ \frac{t}{2\pi} \end{pmatrix},$$

wobei $t \in [0, 2\pi]$. Die Vektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ besitzen nur eine konstante Komponente ungleich Null in z-Richtung.

4. Sind (x_1, x_2, x_3) die kartesischen Koordinaten eines Punktes, so sind parabolische Zylinderkoordinaten (u, v, z) gegeben durch

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right)\,, \\ x_2 &= uv\,, \\ x_3 &= z\,.\end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x_{1,2}\,, x_3)}{\partial(u, v, z)}.$$

(b) Wie transformiert sich das Volumselement $dV = dx_1 dx_2 dx_3$?

(c) Bestimmen Sie die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_z$!

(d) Geben Sie das Differential $d\mathbf{r}$ des Ortsvektors und den Nabla-Operator ∇ in parabolischen Zylinderkoordinaten an!