5. **Gedämpfter Harmonischer Oszillator I**
Betrachten Sie einen gedämpften, eindimensionalen, harmonischen Oszillator, welcher der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\,\gamma\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0$$

genügt, wobei γ und ω_0 reelle Konstanten sind.

(a) Lösen Sie diese Differentialgleichung durch Verwenden des Ansatzes

$$x(t) = A\,e^{i\,\omega\,t}\ ,$$

d.h. bestimmen Sie ω und die allgemeinste Form der Lösung. Beachten Sie hierbei, dass im Allgemeinen sowohl A als auch ω komplexe Größen sind!

(b) Bestimmen Sie $x(t)$ für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$. Zeichnen sie die Lösung.

(c) Lösen Sie die Harmonischer-Oszillator-Gleichung im Fourier-Raum. Warum ist dieser Lösungsweg so ähnlich zu dem Ansatz ebener Wellen?

Was passiert wenn $\gamma < 0$ ist?

6. **Gedämpfter Harmonischer Oszillator II**
Ein eindimensionaler, gedämpfter, harmonischer Oszillator (siehe 5.) wird durch eine Kraft $F(t) = F_0\,e^{i\,\omega\,t}$ getrieben (m ist die Masse eines Teilchens im harmonischen Potential dass einer geschwindigkeitsabhängigen Dämpfung unterliegt),

$$\ddot{x}(t) + 2\,\gamma\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = \frac{F_0}{m}\,e^{i\,\omega\,t}\ .$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$x(t) = A\,e^{i\,\omega\,t}$$

eine Lösung der Differentialgleichung ist. Bestimmen und zeichnen Sie $A(\omega)$ (für eine sinnvolle Wahl der Parameter).

(b) ω_0 wird als Eigenfrequenz des Systems bezeichnet. Warum?
Was passiert wenn das System mit seiner Eigenfrequenz angeregt wird wenn keine Dämpfung vorliegt?
Ist dann das oben angegebene $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung?

7. **Raketengleichung**

Eine Rakete besteht im Wesentlichen aus Nutzlast und Treibstoff, der entzündet wird und sodann mit einer Geschwindigkeit v_T *relativ zur Rakete* nach hinten ausgestoßen wird. Dabei verliert sie Masse und gewinnt an Impuls (Rückstoß). Vernachlässigen sie die Gravitation.

(a) Berechnen sie die Geschwindigkeit der Rakete zur Zeit t, wenn sie zur Zeit t_0 die Geschwindigkeit v_0 und die Masse m_0 hatte.
Hinweis: Verwenden sie den Impulserhaltungssatz bzw. das zweite Newton'sche Gesetz in seiner ursprünglichen Form $\frac{dp}{dt} = F$.
Hinweis: Da sich auch die Masse der Rakete ändert (nämlich um die Menge an Treibstoff der ausgestoßen wird) gilt $\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m(t)\,v(t)) = \dot{m}\,v + m\dot{v}$.
Warum ist eine hohe Ausströmgeschwindigkeit so wichtig im Raketenbau?

(b) Nahe der Erdoberfläche kann in guter Näherung eine konstante Gravitationsbeschleunigung g angenommen werden. Wie verändert sich die Raketengleichung bzw. $v(t)$ in dieser Näherung?

(c) Warum bestehen Raketen üblicher Weise aus mehreren Stufen? Wenn man annimmt, dass zur "Lagerung" des Treibstoffes 5 % der Treibstoffmasse selbst benötigt werden (Rahmen, Brennkammer, Düsen, usw.), wie schnell kann eine Rakete dann ohne Nutzlast werden?

8. **Kraftffelder**

(a) Ein Teilchen bewege sich in einer Ebene im Kraftfeld

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} 3\,x^2\,y \\ x^3 + 1 \end{pmatrix}$$

von $\boldsymbol{r}_1 = (0,0)$ nach $\boldsymbol{r}_2 = (1,1)$ entlang der folgenden Kurven (Wege):

(i) Diagonal, $\boldsymbol{r}(t) = (t,t)$

(ii) Entlang einer Parabel, $\boldsymbol{r}(t) = (t,t^2)$

(iii) Zuerst waagrecht bis $(1,0)$, dann senkrecht bis $(1,1)$

Berechnen Sie die jeweils verrichtete Arbeit. Bestimmen Sie das zu $\boldsymbol{F}$ gehörige Potential und hieraus die verrichtete Arbeit. Ist dieses Potential eindeutig?

(b) Bestimmen Sie ob folgende Kraftfelder konservativ sind. Falls ja, geben Sie das dazugehörige Potential an.

i. $\boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} 9\,x^2\,y\,z^3 \\ 3\,x^3\,z^3 \\ 9\,x^3\,y\,z^2 \end{pmatrix}$

ii. $\boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} -y\,z^2\,\sin(x\,y) \\ -x\,z^2\,\sin(x\,y) \\ 2\,z\,\cos(x\,y) \end{pmatrix}$

iii. $\boldsymbol{V}_3(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} y\,z^2\,\cos(x\,y)^2 - y\,z^2\,\sin(x\,y)^2 \\ x\,z^2\,\cos(x\,y)^2 - x\,z^2\,\sin(x\,y)^2 \\ x + 2\,z\,\cos(x\,y)\,\sin(x\,y) \end{pmatrix}$