9. **Das ebene Pendel I**

(a) Ein ebenes Pendel besteht aus einer Punktmasse m, die an einem starren, masselosen Stab aufgehängt ist. Machen Sie eine Skizze und leiten Sie die Bewegungsgleichung her:

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \sin\phi = 0, \; \omega^2 = g/l.$$

(b) Berechnen Sie die potentielle und die kinetische Energie. Zeigen Sie, daß aus dem Energieerhaltungsgesetz folgt

$$\dot{\phi} = \pm\omega\sqrt{2\,(\epsilon + \cos\phi - 1)}, \qquad \text{mit } \epsilon = \frac{E}{ml^2\omega^2}.$$

(c) Diskutieren Sie die möglichen Bewegungsformen: Welche Typen von Bewegungen können (in Abhängigkeit des Parameters ϵ) auftreten? Fertigen Sie eine Skizze von $\dot{\phi}$ in Abhängigkeit von ϕ an: Wie unterscheiden sich die verschiedenen Bewegungstypen in Ihrer Skizze?

Hinweis: Um ein qualitatives Bild der Trajektorien $\dot{\phi}(\phi)$zu erhalten, betrachten sie die Ableitung $\frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$.

10. **Das ebene Pendel II**

(a) Lösen Sie die Bewegungsgleichung des ebenen Pendels für den Fall $\epsilon = 2$. Was bedeutet dieser Fall anschaulich? Wie lange braucht das Pendel, um die Position $\phi = \pm\pi$ zu erreichen?

(b) Wie sieht die Periodendauer asymptotisch für den Fall $\epsilon = 2 - \delta$, $\delta \ll 1$ aus?

(c) Betrachten Sie den Fall $\epsilon \to \infty$. Wie sieht die Lösung der Differentialgleichung aus? Berechnen Sie das asymptotische Verhalten der Periodendauer.

11. **Eindimensionales Potential**

Ein punktförmiges Teilchen der Masse m bewegt sich im eindimensionalen Potential $V(x)$,

$$V(x) = \begin{cases} kx^2, & x < 0 \\ -\frac{4V_0}{a^2}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + V_0, & 0 \leq x < a \\ g(x-a), & x \geq a \end{cases} \qquad V_0, a, k, g > 0.$$

Bestimmen Sie $\dot{x}(x)$ in Abhängigkeit der Energie und diskutieren Sie die Bewegung: Welche verschiedenen Bewegungstypen können auftreten? Bestimmen Sie die Periodendauer für die periodischen Bewegungstypen.

12. **Freier Fall mit Luftwiderstand**

Der freie Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes wird näherungsweise beschrieben durch die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -gm + a\dot{x}^2.$$

(a) Zeigen Sie durch Integration der Bewegungsgleichung (Partialbruchzerlegung), daß unter der Anfangsbedingung $v(t = 0) = 0$ gilt:

$$v(t) = -\frac{1}{b}\tanh(bgt), \qquad \text{mit } b^2 = \frac{a}{mg}.$$

(b) Berechnen Sie $v(t)$ im Limes $t \to \infty$.