13. **Fourier Transformation**
Betrachten sie die zeitliche Fourier-Transformation (FT)

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \tilde{f}(\omega) = \int dt\, e^{i\,\omega\, t}\, f(t)\ ,$$

sowie die räumliche FT

$$\mathcal{F}\{f(\boldsymbol{r})\} = \tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \int d^3r\, e^{-i\,\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{r}}\, f(\boldsymbol{r})\ .$$

(a) Transformieren sie folgende Funktionen:
  i. $f(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}$
  ii. $f(t) = t\, e^{-\alpha\, t^2}$, $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$
  iii. $f(t) = \sin(\omega_1\, t) + \cos(\omega_2\, t)$

(b) Bilden sie die dreidimensionale FT des Coulomb Potentials,

$$v_C(\boldsymbol{r}) = \frac{e^2}{|\boldsymbol{r}|}\ ,$$

  i. durch direkte Integration,
  ii. als Grenzwert $\mu \to 0$ des Yukawa-Potentials $v_C(\boldsymbol{r}) = \frac{e^2\, \mathrm{e}^{-\mu\, r}}{|\boldsymbol{r}|}$.

(c) Zeigen sie folgende Relationen:
  i. $\mathcal{F}\{\frac{df(t)}{dt}\} = -i\,\omega\, f(\omega)$, $\mathcal{F}\{\nabla f(\boldsymbol{r})\} = i\, \boldsymbol{k}\, f(\boldsymbol{k})$
  ii. $\mathcal{F}\{\int dt'\, f(t')\, g(t-t')\} = \tilde{f}(\omega)\cdot\tilde{g}(\omega)$ (Faltungssatz)

14. **Erhaltungssätze**

(a) Zeigen Sie, dass für eine beliebige zeitlich konstante Zentralkraft $\boldsymbol{F} = f(\boldsymbol{r})\,\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ der Drehimpuls um das Kraftzentrum (hier: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$) eine Erhaltungsgröße ist.

(b) Wiviele Erhaltungsgrößen hat ein System von n Freihitsgraden (Koordinaten)?

(c) Zeigen sie dass

$$I = -m\ (\dot{x}(t)\ \cos(\omega\, t) + \omega\, x(t)\ \sin(\omega\, t))$$

eine Erhaltungsgröße des ungedämpften harmonischen Oszillators ist.

(d) Zeigen Sie, dass für die Frequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ der Bewegung eines Teilchens im anharmonischen Potential $V(x) = \frac{\omega_0^2}{2}\, x^2 + \frac{\mu}{4}\, x^4$ mit den Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$ und $v(0) = 0$ gilt:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\,\mu\, x_0^2 + \mathcal{O}(\mu^2)\ ,$$

indem Sie den Integranden im Integral zur Berechnung der Periodendauer T nach μ entwickeln.

15. **Zentralpotential**
Für eine Zentralkraft kann aus der Bahn $r(\varphi)$ eindeutig auf die Kraft $f(r) = -\frac{dV}{dr}$ geschlossen werden.

(a) Zeigen Sie dass gilt:

$$f(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{L^2}{m\,r^4}\left[\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\right] .$$

(b) Sie beobachten einen Planeten und erkennen dass er sich auf einer Ellipsenbahn um die Sonne (die in einem Brennpunkt liegt) bewegt. Verwenden Sie obige Beziehung um auf eine $\frac{1}{r^2}$ förmige Zentralkraft zu schließen.

16. **Periheldrehung**

Für eine (annähernd) elliptische Bahn eines Planeten um die Sonne ist das Perihel als jener Bahnpunkt definiert, in dem sich Sonne und Planet am nächsten sind. Für das Kepler-Potential $V(\boldsymbol{r}) = -\frac{\alpha}{r}$ ergeben sich Ellipsen als gebundene Bahnen und das Perihel ist bei jeder Umdrehung am selben Ort. Man kann nun den Einfluss weiterer Planeten in erster Näherug durch ein zusätzliches Potential der Form $-\frac{\beta}{r^2}$ beschreiben. Dadurch ergeben sich keine geschlossenen Bahnen mehr und das Perihel wandert mit jeder Umrundung der Sonne ein kleines Stück weiter. Berechnen sie diese Periheldrehung Näherungsweise.