7. Übung theoretische Physik I Institut für theoretische Physik, JKU Linz
WS 2008 Übungstermin: 21.11.2008

25. Ein masseloses Seil führt über zwei reibungsfreie Rollen, sodaß beide nach unten hängenden Enden ausreichend weit voneinander entfernt sind (sh. Abbildung 1). An einem Ende (A) ist ein Bündel Bananen der Masse m befestigt, am anderen Ende (B) hängt ein Affe der Masse M, der zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt, das Seil hochzuklettern. Die dabei zurückgelegte Entfernung vom Seilende B sei durch die Funktion $d(t)$ gegeben, anfänglich befindet sich das System in Ruhe, $d(0) = \dot{d}(0) = 0$. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion des Systems für geeignete verallgemeinerte Koordinaten. Zeigen Sie, daß die Höhe z des Affen durch die Bewegungsgleichung
$$(m + M)\ddot{z} - m\ddot{d} = (m - M)g$$
bestimmt ist, und integrieren Sie diese. Zeigen Sie, dass sich für den Spezialfall $m = M$ Bananen und Affe um die selbe Höhe heben, und somit ihr Abstand konstant bleibt.

26. **Sphärisches Pendel I**

Unter einem sphärischen Pendel versteht man die Bewegung eines Massenpunktes m auf einer Kugeloberfläche (Radius l) unter dem Einfluß der Schwerkraft $\mathbf{g}$.

Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Massenpunkt auf, ohne den Lagrange-Formalismus zu benutzen!

(a) Dazu benötigen Sie zusätzlich zur Schwerkraft $\mathbf{g}$ noch eine *Zwangskraft* $\mathbf{Z}$, welche die Masse auf der Kugeloberfläche hält. Berechnen Sie zuerst $\mathbf{Z}$. Welche Bedeutung haben die einzelnen Terme?

(b) Zeigen Sie, dass die Komponente des Drehimpulses in Richtung von $\mathbf{g}$ eine Erhaltungsgröße ist.

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung in Kugelkoordinaten auf

(d*) Benutzen Sie die Drehimpulserhaltung, um das Problem auf eine eindimensionale Bewegungsgleichung zu reduzieren.

Hinweise: Ergebnis sh. Angabe Bsp. 27. Sie dürfen Beispiel 26 auch kreuzen, wenn Sie Punkt (d*) nicht gelöst haben.

27. **Sphärisches Pendel II**

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des sphärischen Pendels in *Kugelkoordinaten* auf.

(b) Bestimmen Sie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie, dass das sphärische Pendel durch die Bewegungsgleichung
$$\ddot{\vartheta} - c^2 \frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} = \frac{g}{l}\sin\vartheta$$
beschrieben wird.

(c) Wie wirken sich die Zwangsbedingung und die Drehimpulserhaltung in den Lagrange'schen Gleichungen aus?

28. **Bewegung im Zentralpotential**

Eine Masse m bewegt sich in einem Zentralpotential $V(r)$.

(a) Stellen Sie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen in *Kugelkoordinaten* auf.

(b) Zeigen Sie aus diesen Gleichungen, dass sowohl der Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L}$ als auch dessen z-Komponente Erhaltungsgrößen sind. Wie sieht L^2 aus?

(c) Benutzen Sie die Drehimpulserhaltung, um das Problem auf eine eindimensionale Bewegung in einem effektiven Potential zu reduzieren. Wie sieht das effektive Potential aus?

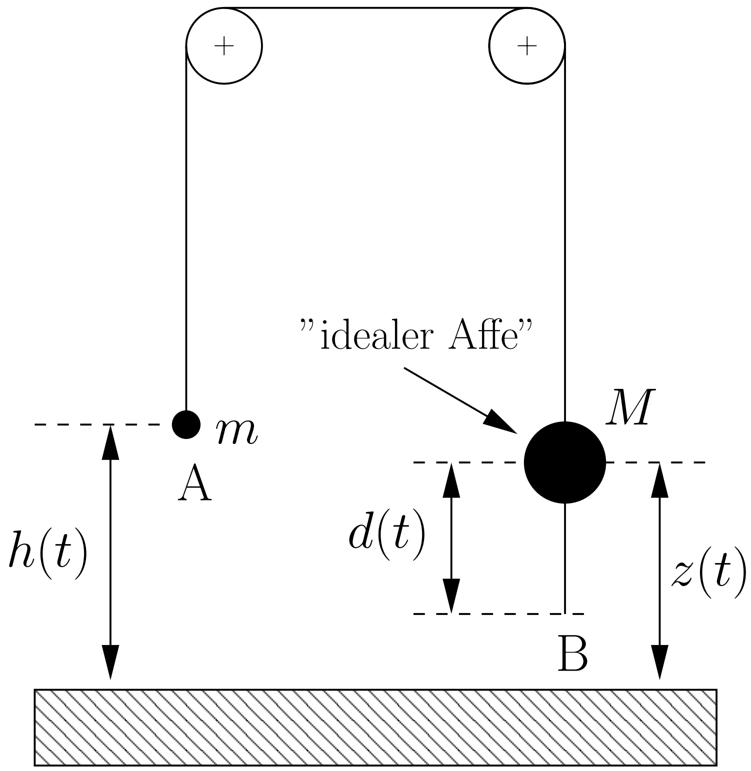

Abbildung 1: Skizze zu Beispiel 25.