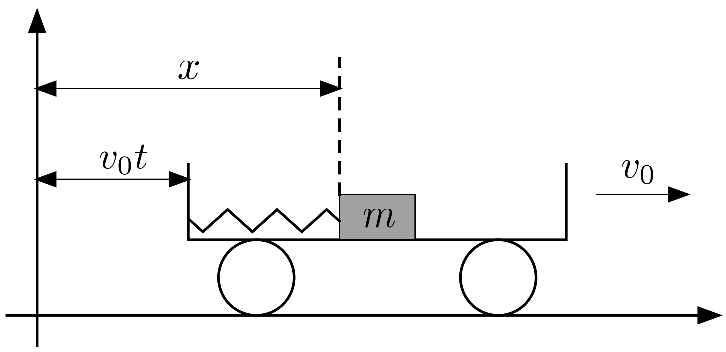
49. Ein Wagen bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 entlang der x-Achse. Auf der Ladefläche befindet sich eine Masse m, die über eine Feder mit der hinteren Wand des Wagens verbunden ist. Die Masse kann reibungsfrei in x-Richtung schwingen, l_0 sei der Gleichgewichtsabstand der Masse von der hinteren Wand.

   (a) Berechne die Hamiltonfunktion H im ruhenden Koordinatensytem. Ist H eine Erhaltungsgrösse? Ist H gleich der Energie des Systems?

   (b) Berechnen sie nun die Hamiltonfunktion H' im mitbewegten Bezugsystem. Ist H' eine Erhaltungsgrösse? Ist H' gleich der Energie des Systems?



50. Die Lagrangefunktion eines Teilchens der Ladung q im Magnetfeld lautet

$$L = \frac{m}{2}\,\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{q}{c}\,\mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{r}},$$

wobei $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ das Vektorpotential zum Magnetfeld $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ist.

   (a) Zeigen Sie, daß diese Lagrange-Funktion auf die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F_L$$

   mit der Lorentz-Kraft

$$F_L = \frac{q}{c}\,\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$$

   führt.

   (b) Berechnen Sie die Hamiltonfunktion.

   (c) Bestimmen Sie aus der Hamiltonfunktion die kanonischen Gleichungen für ein homogenes Magnetfeld in z-Richtung,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Verwenden Sie hierzu *ausschliesslich* die fundamentalen Poissonklammern.

   (d) Berechnen sie die Hamiltonfunktion für das homogene Magnetfeld in Zylinderkoordinaten. Welche Erhaltungsgrössen finden Sie dabei? Vergleichen Sie ihre Erhaltungsgrössen mit dem Ausdruck

$$\mathbf{L}_k = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{B},$$

   wobei $\mathbf{p}$ der zu $\mathbf{r}$ kanonisch konjugierte Impuls ist.

(e) Zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion aus Teil (b) gleich der Energie ist (Für welche Systeme gilt dies immer? Warum muß es hier nicht unbedingt gelten?)

51. (a) Gegeben Sei die Funktion $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Wie kann man mit Hilfe von Poisson-Klammern überprüfen, ob es sich bei f um eine Erhaltungsgrösse handelt?

(b) Die Funktionen $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ und $g(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ seien Erhaltungsgrössen. Zeigen Sie, daß damit auch

$$\{f, g\}$$

eine Erhaltungsgrösse ist.

(c) Überprüfen Sie, ob für den harmonischen Oszillator mit der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 \tag{1}$$

die Funktion

$$f(q, p, t) = p \sin \omega t - m\omega q \cos \omega t$$

eine Erhaltungsgrösse ist.

52. (a) Zeigen Sie, daß folgende Transformationen kanonisch sind:

i.

$$P = \frac{1}{2}\left(q^2 + p^2\right), \qquad Q = \arctan \frac{q}{p}$$

ii.

$$p_1 = \sqrt{k_1 P_1} \sin Q_1 + \sqrt{k_2 P_2} \sin Q_2 \qquad p_2 = \sqrt{k_1 P_1} \sin Q_1 - \sqrt{k_2 P_2} \sin Q_2$$
$$q_1 = -\sqrt{P_1/k_1} \cos Q_1 - \sqrt{P_2/k_2} \cos Q_2 \qquad q_2 = -\sqrt{P_1/k_1} \cos Q_1 + \sqrt{P_2/k_2} \cos Q_2$$

(b) Lösen Sie mit Hilfe der Transformation (ii) die Bewegungsgleichungen für die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{k_1^2}{4}\left(q_1 + q_2\right)^2 + \frac{k_2^2}{4}\left(q_1 - q_2\right)^2 .$$