53. Kanonische Transformation: Harmonischer Oszillator

Gegeben sei ein Harmonischer Oszillator mit der Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,q^2 \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Transformation kanonisch ist:

$$Q = p + i\,a\,q$$
$$P = \frac{p - i\,a\,q}{2\,i\,a} \ .$$

(b) Wählen Sie die Konstante a so, dass die neue Hamiltonfunktion möglichst einfach wird und lösen Sie diese.

(c) Zeigen Sie, dass die gefundene Lösung mit der herkömmlichen Lösung

$$q(t) = A\,e^{i\,\omega\,t} + B\,e^{-i\,\omega\,t}$$

übereinstimmt.

54. Totale Differentiale und Legendretransformationen

Angenommen man kennt von einer Funktion $f(x, y)$ das totale Differential

$$\begin{aligned} dF &= a(x, y)\,dx + b(x, y)\,dy \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x dy \ , \end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned} F = \int dF &= \int dx\,a(x, y) = f(x, y) + c_a(y) \\ &= \int dx\,a(x, y) = f(x, y) + c_b(x) \ . \end{aligned}$$

Kombination der letzen beiden Zeilen, $c_a(y) = c_b(x)$, zeigt, dass die beiden "Integrationskonstanten" gleich sein müssen und f die ursprüngliche Funktion F bis auf eine Konstante bestimmt:

$$F(x, y) = f(x, y) + const. \ .$$

(a) $\mathcal{L}(q, \dot{q}) \to \mathcal{H}(q, p)$
Bestimmen Sie das totale Differential der Lagrangefunktion und der Funktion $p\,\dot{q} - \mathcal{L}$ (also der Hamiltonfunktion, aber noch "wissen wir das nicht") und bestimen Sie daraus, von welchen Variablen diese Funktion abhängt. Verwenden Sie die Definition $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$.
Vergleichen Sie dies mit dem totalen Differential der Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(q, p)$ und leiten Sie daraus die kanonischen Gleichungen ab.

(b) Gehen Sie den umgekehrten Weg am Beispiel des Harmonischen Oszillators. Starten Sie mit der Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,q^2 \ ,$$

bilden Sie das totale Differential sowie $d(p\,\dot{q} - \mathcal{H})$ und ersetzen sie hierin p durch $m\,\dot{q}$ (warum?) und integrieren sie nach den beiden verbleibenden Differentialen.

(c) Betrachten Sie die kanonische Transformation zur Erzeugenden

$$F_2(q, p', t) = q\,p' - f(q, t)$$

wobei f eine beliebige Funktion der Teilchenposition und der Zeit ist. Wie ändert sich die Lagrangefunktion unter dieser Transformation und wie sieht die neue Hamiltonfunktion aus?

55. **Funktionalableitungen**

Ein Funktional $F[f]$ ordnet einer Funktion f eine Zahl zu. Ähnlich wie Funktionen kann man auch Funktionale nach ihrem Argument ableiten. Eine mögliche Definition ist

$$\frac{\delta}{\delta\phi(r)}\,F[\phi] = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{F[\phi(r') + \epsilon\,\delta(r'-r)] - F[\phi(r')]}{\epsilon} \ .$$

Zum Beispiel bestimmt man die Ableitung von

$$F[\phi] = \int dx'\,f(x')\,\phi(x')$$

wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\phi(x_0)}\,F[\phi] &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left\{\int dx'\,f(x')\,\left(\phi(x') + \epsilon\,\delta(x'-x_0)\right) - \int dx'\,f(x')\,\phi(x')\right\} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left\{\epsilon\int dx'\,f(x')\,\delta(x'-x_0)\right\} \\
&= \int dx'\,f(x')\,\delta(x-x_0) = f(x_0)
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie die folgenden Relationen:

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\,\phi(x') = \delta(x-x')$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\int dx'\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi(x')}{\partial x'}\right)^2 = -\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\int dx'\,f(\phi(x')) = f'(\phi(x)) \equiv \left.\frac{df}{d\phi}\right|_{\phi=\phi(x)}$$

(b) Zeigen Sie *ohne* die Euler-Lagrangegleichung zu verwenden, dass aus dem Variationsprinzip

$$\delta\mathcal{S} = \delta\int dt\,\mathcal{L}(t) = 0$$

die Newton'schen Bewegungsgleichungen folgen. Verwenden Sie hierfür die im vorherigen Punkt abgeleiteten Relationen. Sie dürfen eine konservative Kraft annehmen.

Hinweis: Für eine konservative Kraft hängt die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit ab. Es gilt also

$$\frac{\delta}{\delta x(t)}\,\mathcal{S} = 0$$

auszuwerten.

56. **Symmetrien und Erhaltungssätze**

Gegeben Sei eine Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ und die Erzeugende J einer infinitesimalen kanonischen Transformation.

(a) Zeigen Sie: $\mathcal{H}$ ist invariant unter der durch J erzeugten Transformation, wenn gilt:

$$\{\mathcal{H}, J\} = 0.$$

(b) Zeigen Sie: aus $\{\mathcal{H}, J\} = 0$ folgt, daß J eine Erhaltungsgrösse ist.

(c) Berechnen Sie die Erzeugende der infinitesimalen Drehung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r} + \delta\phi\,(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}), \\ \boldsymbol{p}' &= \boldsymbol{p} + \delta\phi\,(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}), \end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{n}$ ein beliebiger, konstanter Vektor ist um den gedreht wird.

(d) Berechnen Sie die Erzeugende der infinitesimalen Translation.