57. Eine Saite mit konstanter Massendichte σ und Länge l ist an beiden Enden fix eingespannt (konstante Spannung τ). In der Mitte der Saite ist eine Punktmasse m angebracht.

    (a) Finden Sie für kleine transversale Auslenkungen die Bewegungsgleichungen für Saite und Punktmasse.

    (b) Zeigen Sie, daß die Frequenzen der Bewegungsmoden der Masse m die Beziehung

    $$\frac{2c}{\omega l} \cot \frac{\omega l}{2c} = \frac{m}{\sigma l}$$

    erfüllen, wobei $c^2 = \tau/\sigma$ gilt. Diskutieren Sie die Grenzfälle $m \to 0$ und $m \to \infty$.

    (c) Zeigen Sie, daß die Eigenfunktionen $\rho_j(x)$ die Orthogonalitätsbeziehung

    $$\int_0^l \rho_p(x) m(x) \rho_q(x)\, dx = \delta_{pq}$$

    erfüllen, wobei $m(x) = \sigma + m\delta(x - l/2)$ die Massendichte des Gesamtsystems ist.

58. Ein geladenes Teilchen (Ladung e) bewegt sich in der xy-Ebene unter dem Einfluss einer Zentralkraft mit Potential $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$. Gleichzeitig wirkt ein homogenes Magnetfeldes $\mathbf{B}$, welches durch das Vektorpotential

    $$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$$

    beschrieben wird.

    Leiten Sie die Hamilton-Jacobi Gleichung in ebenen Polarkoordinaten her. Separieren Sie die Gleichung und zeigen Sie, daß sie identisch zur Hamilton-Jacobi Gleichung eines harmonischen Oszillators mit Kraftkonstante

    $$k' = k + m\omega_L$$

    ist, wenn der kanonische Impuls p_ϕ zum Zeitpunkt $t = 0$ verschwindet. Hierbei ist

    $$\omega_L = \frac{e^2B^2}{4mc^2}$$

    die so genannte Larmorfrequenz.

59. (a) Gegeben ist die Lagrangedichte

    $$l(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$$

    für die Felder $\phi_i(\{x_\mu\})$, mit $x_\mu = (x, y, z, \mathrm{i}ct)$. Zeigen Sie, daß aus der Stationarität der Wirkung

    $$S = \int_\Gamma l(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)\, d^n x_\mu$$

    die Lagrange-Gleichungen

    $$\frac{\partial l}{\partial \phi_i} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial l}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} = 0$$

    folgen. Sie dürfen annehmen, daß die Felder $\phi_i(\{x_\mu\})$ am Rand des Integrationsgebietes Γ verschwinden.

(b) Die Hamiltondichte eines Feldes ist definiert als

$$h = \pi_i \dot{\psi}_i - l,$$

mit den kanonischen Feldimpulsen

$$\pi_i = \frac{\partial l}{\partial \dot{\psi}_i}.$$

Angenommen, h ist eine Funktion der Felder und Feldimpulse und deren Gradienten,

$$h = h(\psi_j, \pi_j, \nabla\psi_j, \nabla\pi_j, x_\mu),$$

wie sehen die Hamilton'schen Gleichungen für Felder und Feldimpulse aus?

(c) Die integralen Lagrange- und Hamiltonfunktionen sind definiert durch

$$L = \int l \, d^3x \qquad \text{und} \qquad H = \int h \, d^3x,$$

zwischen ihnen besteht der Zusammenhang

$$H = \int \pi_i \dot{\psi}_i \, d^3x - L.$$

Zeigen Sie, daß mit Hilfe dieser Funktionen die Lagrangeschen Feldgleichungen in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \frac{\delta L}{\delta \phi_i}$$

geschrieben werden können, und die Hamilton'schen Gleichungen die Gestalt

$$\dot{\phi}_j = \frac{\delta H}{\delta \pi_j}, \qquad \dot{\pi}_j = -\frac{\delta H}{\delta \phi_j}$$

annehmen.

60. Gegeben Sei die Lagrangedichte

$$l = -\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \psi^* \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla\psi^*)(\nabla\psi) - V(\mathbf{r})\psi^*\psi,$$

wobei ψ und ψ^* voneinander unabhängige Feldgrössen sind ($\psi_i \to \psi, \psi^*$).

(a) Berechnen Sie die Lagrange'schen Feldgleichungen.

(b) Berechnen Sie die Hamiltondichte und die zugehörigen Hamilton'schen Gleichungen.