Beispiel 11c: $[\frac{1}{r}, \mathbf{p} \times \mathbf{L}] =?$ wobei $\mathbf{p} = -\mathrm{i}\hbar\nabla, \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Führe Indexschreibweise ein

$$p_j = -\mathrm{i}\hbar\partial_j, \qquad L_j = \varepsilon_{jkl} r_k (-\mathrm{i}\hbar)\partial_l \tag{1}$$

so erhalten wir für den Kommutator

$$-\hbar^2 \left[\frac{1}{r}, \varepsilon_{jkl}\partial_k \varepsilon_{lmn} r_m \partial_n\right]. \tag{2}$$

wenden Produktregel an

$$-\hbar^2 \left[\frac{1}{r}, \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn}\left(\delta_{km}\partial_n + r_m\partial_k\partial_n\right)\right]. \tag{3}$$

Verjüngung von $\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn}\delta_{km} = -2\delta_{jn}$ liefert

$$-\hbar^2 \left[\frac{1}{r}, -2\partial_j + \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn} r_m \partial_k \partial_n\right] \tag{4}$$

Jetzt können wir den Kommutator ausrechnen

$$-\hbar^2 \left\{\frac{1}{r}(-2\partial_j + \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn} r_m\partial_k\partial_n) - (-2\partial_j + \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn} r_m\partial_k\partial_n)\frac{1}{r}\right\} = \tag{5}$$

Betrachte zweiten Term $(-2\partial_j + \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn} r_m\partial_k\partial_n)\frac{1}{r}$, Anwenden der Produktregel unter Benutzung von

$$\partial_j \frac{1}{r} = -\frac{r_j}{r^3} \tag{6}$$

$$\partial_k\partial_n\frac{1}{r} = \partial_k\frac{1}{r}\partial_n - \partial_k\frac{r_n}{r^3} = \frac{1}{r}\partial_k\partial_n - \frac{r_k}{r^3}\partial_n - \frac{r_n}{r^3}\partial_k - \frac{\delta_{kn}}{r^3} + 3\frac{r_n r_k}{r^5} \tag{7}$$

ergibt

$$= -2\frac{1}{r}\partial_j + 2\frac{r_j}{r^3} + \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn} r_m \left(\frac{1}{r}\partial_k\partial_n - \frac{r_k}{r^3}\partial_n - \frac{r_n}{r^3}\partial_k - \frac{\delta_{kn}}{r^3} + 3\frac{r_n r_k}{r^5}\right) \tag{8}$$

Nun versuchen wir den Ausdruck in (8) zu vereinfachen. Die Terme $\propto r_m r_n$ fallen weg, da (symmetrisches überschoben mit antisymetrischem ergibt 0)

$$\varepsilon_{lmn} r_m r_n = 0 \tag{9}$$

setzen wir (8) in (5) ein, erkennen wir, daß der 1. und 2. Term in (5) sich mit dem 1. und 3. Term (8) wegheben

$$-\hbar^2 \left\{-2\frac{r_j}{r^3} - \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn} r_m \left(-\frac{r_k}{r^3}\partial_n - \frac{\delta_{kn}}{r^3}\right)\right\} \tag{10}$$

Schließlich erhalten wir

$$\hbar^2 \left\{ (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) r_m \frac{r_k}{r^3} \partial_n \right\} = \frac{\hbar^2}{r^3} \left(r_j r_k \partial_k - r_k r_k \partial_j \right) = \frac{\hbar^2}{r^3} \Big(\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \nabla) - r^2 \nabla \Big) \tag{11}$$

wobei

$$\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn}\delta_{kn} = 2\delta_{jm}, \qquad \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ljk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \tag{12}$$