1. Eine ebene Lichtwelle mit Wellenlänge λ wird an einem Schirm in der xy-Ebene gebeugt. Der Schirm hat im Abstand d voneinander zwei unendlich lange, parallele Spalte der Breite a. Für sehr grossen Abstand des Detektors vom Schirm (der Fall der sog. Frauenhofer-Beugung) gilt folgende Bedingung für die Intensität I, die in den Winkel θ gebeugt wird:

$$u(\theta) = u_0 \int_\Omega e^{ikx\theta} dx, \quad I(\theta) = |u(\theta)|^2 , \tag{1}$$

wobei nur über die Öffnungen Ω des Schirms integriert wird, und $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ die Wellenzahl der einfallenden Lichtwelle ist.

Berechnen Sie die Intensität für den Fall, dass:

(a) nur ein Spalt geöffnet ist,

(b) beide Spalte geöffnet sind.

Vergleichen Sie die resultierenden Intensitäten und interpretieren Sie die Ergebnisse. Wie würde im zweiten Fall die Intensitätsverteilung aussehen, wenn Sie durch eine inkohärente Beugung and den beiden Einzelspalten zustande gekommen wäre?

2. Ausgehend von der Wirkung $\int p_i dq_i$ in der klassischen Mechanik fordert die Bohr-Sommerfeld'sche Quantisierungsbedingung, dass

$$\int p_i dq_i = nh, \text{ mit } n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

gilt. Diese Bedingung schränkt die möglichen Werte für Erhaltungsgrössen wie Energie oder Drehimpuls ein. Wenden Sie diese Quantisierungsbedingung auf folgende Probleme an:

(a) Bestimmen Sie die möglichen Energien für den eindimensionalen harmonischen Oszillator.

(b) Bestimmen Sie die möglichen Energien und Drehimpulse für das Wasserstoffatom, d.h. für ein Elektron (Elementarladung e) in einem Potential der Form $-e/r$. (Hinweis: Sie können das Problem zweidimensional behandeln)

3. Geben Sie die Eigenmoden des folgenden Differentialgleichungssystems an:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Wie entwickelt sich ein beliebiger Anfangsvektor (x_0, y_0) in Abhängigkeit von t? Stellen Sie die Koeffizientenmatrix des Systems in der Basis seiner Eigenvektoren dar.

4. (a) Berechnen Sie die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen. Beweisen Sie dabei sämtliche Eigenschaften der Fouriertransformation, die sie verwenden.

   i. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x| < a \\ 0 & \text{für} \quad |x| > a \end{cases}$

   ii. $g(x) = \Theta\left(a^2 - b^2x^2\right)$

   iii. $h(x) = \Theta\left(a^2 - b^2x^2 + 2bcx - c^2\right)$

   (b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ka)\cos(kx)}{k} dk.$$