1. Berechnen bzw. Zeigen Sie (mit $\mathbf{A} := \mathbf{A}(\mathbf{r})$, $f := f(\mathbf{r})$ und $r := |\mathbf{r}|$):
   (a) $\nabla \frac{1}{r^2} =?$
   (b) $\nabla f(r)\mathbf{r} =?$
   (c) $\nabla \cdot \left(\frac{x}{\rho^2}, \frac{y}{\rho^2}, 0\right) =?$, $\nabla \times \left(\frac{x}{\rho^2}, \frac{y}{\rho^2}, 0\right) =?$ mit $\rho^2 = x^2 + y^2$
   (d) $\nabla \times (f\,\mathbf{A}) = f\,(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla f) \times \mathbf{A}$
   (e) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla\,(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

2. Besitzen die folgenden Vektorfelder $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ (mit $\mathbf{a}, \beta$ konstant) ein Potential? Falls ja, berechnen Sie es.
   (a) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$
   (b) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \beta\mathbf{a}$
   (c) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{a}$

   Wie groß ist die Ergiebigkeit $Q(R) = \oint_{O(R)} \mathbf{F}\, d^2\mathbf{O}$ dieser Felder, wobei $O(R)$ die Oberfläche einer Kugel mit Radius $R$ um den Ursprung darstellt?

3. (a) Zeigen Sie die Identität
   $$\int_V d^3\mathbf{r}\, \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \oint_O d^2\mathbf{O} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}),$$
   wobei $O$ die Begrenzungsfläche von $V$ ist.
   *Hinweis:* Führen Sie die Identität durch Multiplikation mit einem konstanten Vektor $\mathbf{c}$ auf die bekannten Integralsätze zurück.
   (b) Berechnen Sie folgende Oberflächenintegrale
      i. $\oint_O d^2\mathbf{O} \times \mathbf{r} =?$
      ii. $\oint_O d^2\mathbf{O}\ (\mathbf{a} \times \mathbf{r})\, r^2 =?$
      iii. $\oint_O d^2\mathbf{O} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) =?$

4. Gegeben sei das Vektorfeld
   $$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} f(r)$$
   (a) Berechnen Sie $\nabla \cdot \mathbf{A}$ und $\nabla \times \mathbf{A}$. Machen Sie eine Skizze von $\mathbf{A}$ — welche Symmetrie besitzt das Vektorfeld?
   (b) Verifizieren sie den Stoke'schen Satz
   $$\int_R d^2\mathbf{O}\, \nabla \times \mathbf{A} = \oint_C d\mathbf{s}\, \mathbf{A}$$
   durch Integration über eine Kreisscheibe $R$ mit Rand $C$ in der $xy$-Ebene.
   (c) Zeigen Sie, daß das Integral $\oint_O \mathbf{A}\, d^2\mathbf{O}$ über die Oberfläche einer Kugel gleich Null ist (durch Berechnung des Integrals).

5. Gesucht ist die Lösung $\phi(r, \varphi)$ der Gleichung $\nabla^2\phi(r, \varphi) = 0$ im Inneren des Einheitskreises (harmonische Funktion), wobei $\phi(r, \varphi)$ am Rand des Kreises durch
   $$u(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \le \varphi < \pi \\ 0 & \text{für} \quad \pi \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$
   gegeben ist. Geben Sie $\phi(r, \varphi)$ an und ermitteln Sie $\nabla\phi(r, \varphi)$. *Hinweis*: Poisson'scher Integralkern.