5. Gesucht ist die Lösung $\phi(r,\varphi)$ der Gleichung $\nabla^2\phi(r,\varphi) = 0$ im Inneren des Einheitskreises (harmonische Funktion), wobei $\phi(r,\varphi)$ am Rand des Kreises durch

$$u(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \le \varphi < \pi \\ 0 & \text{für} \quad \pi \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

gegeben ist. Geben Sie $\phi(r,\varphi)$ an und ermitteln Sie $\nabla\phi(r,\varphi)$. *Hinweis*: Poisson'scher Integralkern.

6. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{a} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \text{ mit } \mathbf{a} = \textit{const}.$$

(a) Zerlegen Sie $\mathbf{F}$ in einen reinen Divergenzanteil $\mathbf{F}_{\text{div}}$ und einen reinen Rotationsanteil $\mathbf{F}_{\text{rot}}$, *i.e.* $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{div}} + \mathbf{F}_{\text{rot}}$ sodaß $\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{rot}} = 0$ und $\nabla \times \mathbf{F}_{\text{div}} = \mathbf{0}$.

(b) Berechnen Sie die Potentiale $\phi(\mathbf{r})$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ sodaß $\mathbf{F}_{\text{div}}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r})$ und $\mathbf{F}_{\text{rot}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$.

(c) Machen Sie die Probe, indem Sie aus den Potentialen das Vektorfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\phi(\mathbf{r})$ bestimmen.

7. Drücken Sie folgende Ladungsverteilungen durch δ- oder θ-Funktionen aus. Überprüfen Sie Ihren Ausdruck durch Berechnung der Gesamtladung $Q = \int d^3\mathbf{r}\, \rho(\mathbf{r})$.

(a) homogen geladene Kugel mit Radius R und Raumladungsdichte ρ_0

(b) homogen geladene unendlich dünne Kugelschale mit Radius R und Flächenladungsdichte σ_0

(c) Punktladung im Koordinatenursprung

(d) homogen geladene, unendlich dünne Zylinderschale mit Radius R, Länge 1 und Flächenladungsdichte σ_0

(e) homogen geladene, unendlich dünne Ladungslinie der Länge 1 und Ladung λ pro Längeneinheit

Hinweis: Die δ-Funktion transformiert unter einer Koordinatentransformation $\{x_i\} \to \{u_i\}$ wie

$$\delta(x_1 - x_1^0)\,\delta(x_2 - x_2^0)\,\delta(x_3 - x_3^0) = \left|\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)\right|^{-1} \delta(u_1 - u_1^0)\,\delta(u_2 - u_2^0)\,\delta(u_3 - u_3^0)$$

8. Bestimmen Sie das Potential $\phi(r)$ im ganzen Raum für folgende Ladungsverteilungen:

(a) eine homogen geladene Kugel mit Radius R und Raumladungsdichte ρ_0,

(b) eine homogen geladene unendlich dünne Kugelschale mit Radius R und Flächenladungsdichte σ_0.

Drücken Sie $\phi(r)$ durch die Gesamtladung Q aus. Berechnen Sie $\mathbf{E}(\mathbf{r}) := -\nabla\phi(\mathbf{r})$ und skizzieren Sie den Verlauf von $\phi(r)$ und $E(r)$.