13. Berechnen Sie in kartesischen Koordinaten Monopol-, Dipol- und Quadrupolmomente eines mit der Ladungsdichte ρ_0 homogen geladenen Würfels der Kantenlänge a (Mittelpunkt des Würfels im Ursprung, Kanten parallel zu den Koordinatenachsen). Geben Sie die Beiträge der einzelnen Multipolkomponenten zum Potential für große Abstände vom Ursprung an.

14. Berechnen Sie die ersten nicht-verschwindenden sphärischen Multipolmomente q_{lm} einer Kugel (Radius R, Mittelpunkt im Ursprung) mit der Oberflächenladungsdichte $\sigma_0 \cos\theta$.

Hinweis: In der Vorlesung wurde $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ in Legendre-Polynome $P_l(\cos\theta)$ entwickelt. Die Legendre-Polynome hängen mit den Kugelflächenfunktionen Y_{lm} wie folgt zusammen:

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l(\cos\theta)e^{im\phi}.$$

Damit erhält man für das elektrostatische Potential $\Phi(\mathbf{r})$ in der Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen folgende Darstellung

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\,q_{lm}\,r^{-(l+1)}Y_{lm}(\theta,\phi) \quad \text{mit} \quad q_{lm} = \int d^3\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})r^l Y^*_{lm}(\theta,\phi).$$

Die Kugelflächenfunktionen niedrigster Ordnung lauten:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{im\phi},$$

weiters gilt:

$$Y_{l(-m)}(\theta,\phi) = (-1)^m Y^*_{lm}(\theta,\phi).$$

---

15. Ein Dipol mit Dipolmoment $\mathbf{p}$ befindet sich im Abstand a vor einer unendlich ausgedehnten, leitenden und geerdeten Platte.

    (a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Spiegelladungsmethode das Potential im gesamten Raum. Welchen Multipolcharakter at das Feld weit weg von der Platte, wenn $\mathbf{p}$ senkrecht bzw. parallel zur Platte steht?

    (b) Berechnen Sie die elektrostatische Energie des Dipols in Abhängigkeit seiner Orientierung und daraus das auf den Dipl wirkende Drehmoment.