27. Auf der Oberfläche einer Hohlkugel mit dem Radius R sei eine Ladung Q gleichmäßig verteilt. Anfangs rotiert die Kugel mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 um einen ihrer Durchmesser. Von $t = 0$ an wird sie gemäß

$$\omega(t) = \omega_0 \, e^{-\gamma t} \quad (\gamma > 0)$$

abgebremst.

(a) Welches elektrische Feld wird dabei in quasistationärer Näherung ($\dot{\mathbf{E}} \approx 0$) im Außenraum ($r > R$) induziert?

(b) Unter welchen Bedingungen kann es gegenüber dem elektrostatischen Feld ($t < 0$) vernachlässigt werden?

(c) Welche Energie wird pro Zeiteinheit von der Kugel abgestrahlt?

(d) Welche Energie wird insgesamt während des Bremsvorgangs abgegeben?

28. Eine elektromagnetische Welle breitet sich im Vakuum in z-Richtung aus und ist

(a) linear polarisiert,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(kz - \omega t),$$

(b) zirkular polarisiert,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \left[\cos(kz - \omega t)\mathbf{e}_x + \sin(kz - \omega t)\mathbf{e}_y \right].$$

Berechnen Sie

i) die magnetische Induktion $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$,

ii) den Poynting-Vektor $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$,

iii) den Strahlungsdruck auf eine um den Winkel θ gegen die Ausbreitungsrichtung geneigte Ebene, unter der Annahme, daß die Strahlung von der Ebene vollständig absorbiert wird.

29. Eine mögliche Lösung der Maxwell'schen Gleichungen ist gegeben durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}, \quad \phi(\mathbf{r}, t) = 0,$$

mit dem Vektorpotential $\mathbf{A}$ und dem Skalarpotential $\phi(\mathbf{r}, t)$.

Bestimmen Sie, welche Bedingungen die einzelnen Maxwell-Gleichungen den Konstanten $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{k}$ und ω auferlegen.

29. (a) Die Funktionen $\hat{f}(k)$ und $\hat{g}(k)$ seien die Fouriertransformierten von $f(x)$ und $g(x)$. Wie lautet die Fouriertransformierte des Produktes $h(x) = f(x)g(x)$?

(b) Berechnen Sie die Fouriertransformierten der Funktionen

i. $f(x) = e^{-|x|}$

ii. $f(x) = e^{-x^2/d^2}$

(c) Zeigen Sie, daß für jede quadratintegrable Funktion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk$$

gilt (*Parseval'sches Theorem*).