43. Gegeben sei die lorentzinvariante Lagrangefunktion

$$L = -\frac{m}{2} u_\mu u^\mu - \frac{q}{c} u_\mu A^\mu(x) \tag{1}$$

für ein Teilchen der Masse m und Ladung q in einem äusseren Viererektorpotential $A^\mu(x)$.

(a) Zeigen Sie, daß die Euler-Lagrange Gleichungen der Lagrangefunktion (1) die korrekten relativistischen Bewegungsgleichungen für das Teilchen sind.

(b) Geben Sie die Definition der kanonischen Impulse and und schreiben Sie die effektive Hamiltonfunktion H sowohl in kovarianter Form als auch mit getrennten Orts- und Zeitkomponenten an. Warum ist H lorentzinvariant? Was ist der Wert von H?

44. (a) Zeigen Sie, daß die Lagrangefunktionen L und L' mit

$$L' = L + \frac{d}{dt}\Lambda(x) \tag{2}$$

auf die selben Euler-Lagrange Gleichungen führen. *Hinweis:* Hamilton'sches Prinzip.

(b) Zeigen Sie, daß die Eichtransformation des Vektorpotentials,

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda\,, \tag{3}$$

die Lagrangefunktion

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{u}\cdot\vec{A} - e\Phi \tag{4}$$

eine äquivalente Lagrangefunktion transformiert.

45. Eine alternative Form der Lagrangedichte für das elektromagnetische Feld ist

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi}\partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha. \tag{5}$$

(a) Leiten Sie die Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen ab. Stimmen sie mit den Maxwell-Gleichunge überein? Unter welchen Voraussetzungen?

(b) Zeigen Sie, unter welchen Bedingungen sich die Lagrangedichte (5) von der üblichen Form

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha \tag{6}$$

um eine Viererdivergenz unterscheidet. Hat der zusätzliche Divergenzterm Einfluß auf die Bewegungsgleichungen?