Johannes Kepler Universität Linz
Institut für Theoretische Physik

Übung zu Theoretischer Physik II für LA (Quantenmechanik und Thermodynamik) SS2005

3.Übungstermin: 12.4.2005

B1.) Lösungen $\psi(x,t)$ der freien zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung ermitteln mittels Fouriertransformation

Führen Sie folgende Schritte zum Aufsuchen der Lösung des Anfangswertproblems durch:

a.) Transformieren Sie die zeitabhängige freie Schrödingergleichung bzgl. der Ortsvariable x.

b.) Lösen Sie die erhaltene (partielle) Differentialgleichung bzgl. der Zeit d.h. schreiben Sie allgemein die Lösung $\tilde{\phi}(p,t)$ an.

c.) Transformieren Sie nun auch die gegebene Wellenfunktion $\psi(x,0)$, um diese in die allgemeine Lösung vom vorherigen Punkt einzusetzen.

d.) Als letzten Schritt führen Sie die Retourtransformation in den Ortsraum durch, sodass Sie $\psi(x,t)$ als $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{px}{\hbar} - i\frac{p^2}{2m\hbar}t} \tilde{\phi}(p,0)$ erhalten.

Wenden Sie obige Methode konkret für folgenden Anfangswert $\psi(x,0) = N * e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$ an, wobei Sie zuerst die Normierungskonstante mittels $1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x,0)|^2$ bestimmen müssen.

5.) Gaußpaket – freies Teilchen:

a.) Ein freies Teilchen ist durch $\psi(x,0) = Ne^{-\frac{x^2}{2b^2}}$ gegeben. Bestimmen Sie $\psi(x,t) = N(t)e^{-\frac{x^2}{2b(t)^2}}$ und daraus $|\psi(x,t)|^2$, indem Sie in b das Auseinanderlaufen des Wellenpakets einbauen (siehe VL).
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall [-10b,10b] füt $t = 0$ und für $t = 10\frac{mb^2}{\hbar}$ zu finden?

b.) Ein freies Teilchen ist durch $\psi(x,0) = Ne^{ik_0x - \frac{x^2}{2b^2}}$ gegeben.
Berechnen Sie den Wahrscheinlichkeitsstrom $j(x,0)$.
Freiwillig: Bestimmen Sie $\psi(x,t) = N(t)e^{i(k_0x-\omega t) - \frac{(x-v_0t)^2}{2b(t)^2}}$ und daraus $|\psi(x,t)|^2$ und $j(x,t)$, indem Sie das Wissen aus der VL über das Auseinanderlaufen und der Phasen- bzw. Gruppengeschwindigkeit verwenden.
Hinweis: Welche Rolle spielt v_0? Was passiert mit wachsendem t? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall [-10b,10b] füt $t = 0$ und für $t = 10\frac{mb^2}{\hbar}$ zu finden?

c.) Zeigen Sie für den Fall $v_0 = 0$ die Wahrscheinlichkeitserhaltung.

6.) Harmonischer Oszillator quantenmechanisch:

- Werten Sie folgende Ausdrücke für den HO aus.
  - $x|n>, p|n>, <m|x|n>, <m|p|n>, <m|x^2|n>, <m|p^2|n>$ und $<m|H|n>$
  - Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System im Zustand $|\psi(0)> = N(|0> + i|1> - |2>)$. Bestimmen Sie die Normierung N. Wie lautet $|\psi(t)>$?.
    Bestimmen Sie folgende Mittelwerte $<\psi(t)|x|\psi(t)>, <\psi(t)|p|\psi(t)>$ und $<\psi(t)|H|\psi(t)>$
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das System ($|\psi(t)>$) zum Zeitpunkt t im Zustand $|0>$ bzw. $|3>$?
- Geben Sie für einen HO, der sich zusätzlich in einem elektrischen Feld E befindet, die Eigenwerte und Eigenszustände an (Hinweis: zum "gewöhnlichen" HO bekommt man eine Zusatzterm in der Hamiltonfunktion $-qEx$, wobei es sich bei q um die Ladung handelt. Ergänzen Sie zu einem vollständigen Quadrat und definieren Sie analog wie in der VL Auf- und Absteigeoperatoren.)
  Werten Sie folgende Mittelwerte aus: $<0|x|0>, <1|p|1>$ und $<\psi|x|\psi>$ mit $|\psi> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1> + i|2>)$.