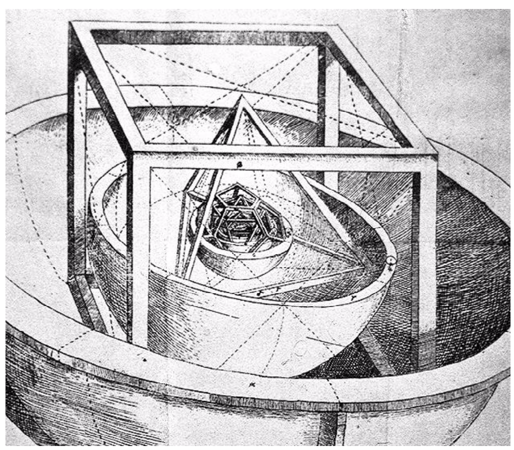
Harmonie und Physik –
Die Hälse der Integrale und die Schönheit der Physik†

Harald Iro

Von den vielen Ansätzen, Veränderung und Fortschritt in den Wissenschaften rational zu erfassen, ist keiner für P. Feyerabend zufriedenstellend: „Es bleiben ästhetische Urteile, Geschmacksurteile, metaphysische Vorurteile, religiöse Bedürfnisse, kurz, *es bleiben unsere subjektiven Wünsche ...*“ (P. Feyerabend „Wider den Methodenzwang“, Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main 1981). Ein über bloß ästhetische Urteile hinausgehendes Moment bei Veränderungen in einer Wissenschaft, welches aufgrund seines Beigeschmacks von Subjektivität in eine Systematik der Erkenntnis schwer hineinpasst, ist das Verlangen nach Harmonie, das Bestreben Wohlordnung, Ebenmaß, Übereinstimmung zu finden. Auch innerhalb der Physik, bei der Auswahl von Hypothesen, Modellen und Theorien spielt Harmonie eine Rolle; sie ist ein wichtiges Motiv bei der Auswahl der ‘Bilder’ (im Boltzmannschen Sinne[1]) der betrachteten Vorgänge. Dieses Kriterium der Harmonie kann aber ‘metaphysikalische’ Komponenten aufweisen mit denen die Physik nichts anfangen kann. Reduzierte Begriffe in der Physik sind: Ordnung, Symmetrie, Gültigkeit (Vorhersagekraft). Die Relativität von Harmonie illustrieren zunächst zwei Beispiele. Beide betreffen die Gesetzmäßigkeiten und Ordnung im Kosmos.



Keplers Planetenmodell

Das erste Beispiel ist die Erklärung[2] Keplers („Mysterium cosmographicum“, 1596) für die Proportionen der Planetenbahnen in seinem Modell der abwechselnden Ineinanderschachtelung der Sphären der damals 6 bekannten Planeten und der 5 platonischen Körper (regelmäßigen Polyeder), die als besonders harmonisch empfunden wurden. Dieses Bestreben Parallelen in der Harmonie von Umständen in unserer Umgebung und der Harmonie im Kosmos wiederzufinden besteht heute noch: Auch in unserer Zeit wird nach Entsprechungen zwischen der Plantenbewegung und harmonischen Folgen von musikalischen Tönen und Farben gesucht. Für Laien ist das Moment der Harmonie in Keplers Modell sicherlich nachvollziehbar. Schon in wesentlich geringerem Maße trifft das wohl

† „*Schönheit, höre ich Sie da fragen; entfliehen nicht die Grazien, wo Integrale ihre Hälse recken, ...*“. Aus einer Festrede von L. Boltzmann als Rektor, gehalten 1887 an der Karl-Franzens-Universität in Graz.

[1] Vgl. die Einleitung zu Boltzmanns Buch „Die Prinzipe der Mechanik“.

[2] Erklären heißt hier, so wie stets in der Physik, Vorgänge, Umstände auf eine (allgemeinere) Gesetzmäßigkeit zurückführen.

auf eine Beschreibung der Proportionen durch das Titius-Bode Gesetz, einer einfachen mathematischen Beziehung für die Ausmaße der Planetenbahnen[3], zu.

Hingegen überbeansprucht das zweite Beispiel das allgemeine Empfinden von Harmonie. Eine nur Fachleuten zugängliche Harmonie liegt in der Grundgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie[4] (Einstein 1915):

$$\boxed{\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.}$$

Auch den Physiker und Nobelpreisträger M. Born beeindruckt die Schönheit der Theorie[5]:

> „Die Aufstellung der allgemeinen Relativitätstheorie erschien mir damals und erscheint mir auch heute noch als die größte Leistung menschlichen Denkens über die Natur, die erstaunlichste Vereinigung von philosophischer Tiefe, physikalischer Intuition und mathematischer Kunst. Aber sie hatte damals wenig Zusammenhang mit empirischen Tatsachen. Sie zog mich an wie ein Kunstwerk, an dem man sich ergötzt und das man bewundert - aus gehöriger Entfernung."

Ist die Fundamentalgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie tatsächlich harmonisch, oder auch nur schön? Für ungeschulte Augen sicher nicht. Und doch, sie ist Grundlage der modernen Kosmologie in viel umfassenderer Weise als jede Theorie zuvor. Sie spiegelt das Universum – und damit auch seine Harmonie – besser als alle einschlägigen Gleichungen vor ihr.

Die antiken Weltbilder der Naturvorgänge beruhten vielfach auf unüberprüften Vorstellungen. Dass a priori Postulate von Harmonie hinderlich sein können, zeigt das aristotelische Ideal einer Kreisbahn. Es lähmte 17 Jahrhunderte den Fortschritt der Astronomie. Selbst die Einführung einer überaus großen Anzahl von Epizyklen[6], um Übereinstimmung mit den beobachteten Bahnen zu erzielen, war kein Anlass von diesem Ideal abzugehen. Darüber hinaus war das geozentrische System bis in die Neuzeit Bestandteil des Weltbildes der Astronomie. Erst Kopernikus und Kepler beseitigten endgültig[7] das geozentrische

[3]Der Abstand der Planeten zur Sonne beträgt

$$d = 0,4 + 0,3 * N, \qquad N = 0,1,2,4,8,\ldots$$

astronomische Einheiten. Das Gesetz beschreibt nur die innersten Planetenabstände genau.

[4]Die Größen $R_{\mu\nu}$ und R sind Funktionen der Größe $g_{\mu\nu}$, welche die Struktur (ob flach oder gekrümmt) des 4-dimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums charakterisiert. Die kosmologische Konstante Λ, welche ursprünglich von Einstein verworfen wurde, kann aus Beobachtungsdaten – allerdings derzeit noch mit großer Ungenauigkeit – bestimmt werden. G ist die Gravitationskonstante und c die Lichtgeschwindigkeit. Der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ umfaßt die Massen- und Energieverteilung, welche gemäß dieser Gleichung die Krümmung der Raum-Zeit in jedem Punkt hervorruft. (A. Einstein: „Früher hat man geglaubt, wenn alle Dinge aus der Welt verschwinden, so bleibt noch Raum und Zeit übrig; nach der Relativitätstheorie verschwinden aber Zeit und Raum mit den Dingen.")

[5]Zitiert aus: S. Karamanolis, Einstein für Anfänger, Elektra-Verlag, Neubiberg 1995.

[6]Im einfachsten Fall entsteht die Bahnkurve durch die Bewegung des Planeten auf einem Kreis dessen Mittelpunkt sich auf einem größeren Kreis bewegt. Im Zentrum des letzteren befindet sich die Erde. Um die Bahnen der damals bekannten Planeten zu erklären wurden 55 Epizyklen benötigt.

[7]Besonders im Lichte der allgemeinen Relativitätstheorie sind beide Systeme gleichwertig. Solange man aber die Planetenbahnen durch Kurven (und nicht durch Differentialgleichungen) beschreibt, vereinfacht das heliozentrische System diese Beschreibung wesentlich.

System[8].

Harmonie als Eigenschaft von physikalischen Objekten führt auf eine eigenartige Differenz zwischen Naturgesetz und den von ihm beschriebenen Sachverhalten. Letztere können von Laien sehr wohl als harmonisch empfunden werden, mathematisch formulierte Naturgesetze eher nicht. Im Folgenden wird dieser 'Gegensatz' zwischen dem mathematischen, einem Schönheitskriterium weniger zugänglichen Naturgesetz und dessen einzelnen, auch für Außenstehende schönen, harmonischen Lösungen in zwei Bereichen der Natur aufgezeigt:

- Im Makrokosmos sind die Newtonschen Bewegungsgleichungen mit der Gravitationswechselwirkung die Grundlage für die Struktur von Sternsystemen.

- Im Mikrokosmos ist die Schrödinger-Gleichung mit der Coulomb-Wechselwirkung die Grundlage der Molekülstrukturen.

Harmonie im Makrokosmos

Das Keplersche System der Planeten

N. Kopernikus beseitigte 1543 in seinem Werk „De revolutionibus orbium coelestium" durch die Verwendung des heliozentrischen Systems das Problem der rückläufigen Bewegung des Mars sowie einige der vielen Epizyklen der antiken Planetenbahnen; aber er stand noch im Banne des Ideals der Kreisbahnen des Aristoteles und blieb bei der Methode die Übereinstimmung mit den beobachteten Bahnen durch die Einführung von Epizyklen zu erlangen. Das heliozentrische Weltbild des N. Kopernikus ist auf seine Vorstellung von Einfachheit[9] und Schönheit zurückzuführen und nicht etwa auf aktuelle Erkenntnisse über das Planetensystem.

Keplers Planetengesetze (1605-1619)

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen um die Sonne, die sich in einem Fokus der Ellipse befindet.
2. Die Verbindungslinie von einem Planeten zur Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten um die Sonne verhalten sich so wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen der Bahnellipsen.

J. Kepler hat in seinem ersten Gesetz die Kreisbahnen endgültig als unzureichend zur (einfachen, ökonomischen) Beschreibung der Plantenbewegung etabliert. Er hat die nach ihm benannten Gesetze zwischen 1605 und 1619 aufgestellt. Für ihn ist die Sonne reale

[8] Ein weiteres Beispiel für die Beseitigung von (vermeintlicher) Harmonie ist die Überwindung der Laplaceschen Vorstellung vom kosmischen Uhrwerk durch die Entdeckung des chaotischen Verhaltens in den Gleichungen für die Planetenbewegung (s. unten).

[9] Schon aus dem Altertum war bekannt, dass die zeitweise als rückläufig beobachtete Bewegung von Planeten aus einer Bewegung der Erde verstanden werden kann.

Ursache der Planetenbewegung (und nicht bloßes Hilfsmittel zur Verbesserung der Übereinstimmung zwischen mathematischem Modell und Beobachtung). Dies war eine Voraussetzung für die Ableitung der beiden ersten Gesetze in äußerst mühsamer Rechenarbeit aus dem von Tycho Brahe übernommenen Reichtum an astronomischen Beobachtungsdaten. Die Merkurbahn mit der größten Exzentrizität der (damals bekannten) Planeten spielte dabei eine besondere Rolle. Die beiden ersten Gesetze hat er 1609 in seiner „Astronomia nova“ vorgelegt. Das dritte Gesetz veröffentlichte Kepler 1619 in seinem Buch „De harmonice mundi“; auch in diesem Gesetz ist Keplers andauernde Suche nach Harmonie in den Planetenbahnen erkennbar.

Und es ward – Newton[10]

Die **Newtonschen Gesetze** („Philosophiae naturalis principia mathematica“, 1687; im Folgenden kurz „Principia“) zusammen mit der Gravitationskraft ermöglichen eine Berechnung der Plantenbahnen. Die Gesetze besitzen eine weitaus allgemeinere Gültigkeit als ihre einzelnen Lösungen; sie begründen daher die Planetenbewegung. Die Planetengesetze sind allgemeine Eigenschaften von Lösungen der Newtonschen Bewegungsgleichungen.

Der **Bewegungszustand eines Körpers** mit Masse m wird nach Newton durch seinen Impuls[11]

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

charakterisiert. Das **zweite Newtonsche Gesetz** besagt, dass eine Kraftwirkung $\mathbf{f}$ auf einen Körper eine Änderung seines Impulses (Beschleunigung) bewirkt, und zwar gilt

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}.$$

Betrachtet man die **Wechselwirkung zweier Körper** mit den Massen m_1 und m_2 an den Orten $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ und mit den Impulsen $\mathbf{p}_1$ bzw. $\mathbf{p}_2$, dann wird ihre Bewegung durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{p}_1 &= \mathbf{f}_1 \\ \frac{d}{dt}\mathbf{p}_2 &= \mathbf{f}_2 \end{aligned}$$

beschrieben. Die Wechselwirkungskräfte $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$ können durch eine gemeinsame Größe,

[10] „Let Newton be!” ist der Titel einer Anthologie von Beiträgen über Newtons Leben und Werke (J. Fauvel, R. Flood, M. Shortland und R. Wilson, Oxford University Press, Oxford 1988).

[11] Der Ort eines Körpers – repräsentiert durch den Schwerpunkt oder einen anderen ausgezeichneten (mathematischen) Punkt – zur Zeit t habe die Koordinaten $x(t), y(t), z(t)$, die zu einem Vektor $\mathbf{r}(t)$ zusammengefasst werden

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Die Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t, $\mathbf{v}(t)$, ist die erste Zeitableitung des Ortes

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t),$$

d.i. die Änderung des Ortes von $\mathbf{r}(t)$ nach $\mathbf{r}(t+dt)$ innerhalb der Zeit dt.

durch das Wechselwirkungspotenzial $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ ausgedrückt werden[12],

$$\mathbf{f}_i = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|), \qquad i = 1, 2;$$

$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ ist die Länge der Strecke (des Vektors) zwischen den beiden Punkten $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$. Während der Bewegung bleibt die Summe aus den kinetischen Energien der beiden Körper, $\mathbf{p}_1^2/2m_1 + \mathbf{p}_2^2/2m_2$, und ihrem Wechselwirkungspotenzial

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = const =: E,$$

unverändert: Auch wenn sich die Orte und die Impulse der Körper in jedem Moment ändern, hat die Funktion H zu jedem Zeitpunkt denselben Wert E (= Anfangswert). E ist die Gesamtenergie der Körper. Außerdem erfolgt die Bewegung in einer festen Ebene. Hat einer der Körper eine wesentlich größere Masse, dann bleibt er praktisch in Ruhe und es bewegt sich nur der leichtere Körper um ihn: Die beiden Bewegungsgleichungen reduzieren zu einer Gleichung.

Newton erschloß (ab ca. 1665) aus den Keplerschen Gesetzen die **Gravitationskraft** (ebenfalls veröffentlicht in den Principia). Das Potenzial der Kraft lautet:

$$V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \qquad G\text{: Gravitationskonstante;}$$

die gegenseitige Anziehungskraft zwischen zwei Körpern mit Massen m_1 und m_2 ist indirekt proportional zum Quadrat ihres Abstandes

$$|\mathbf{f}(\mathbf{r})| \propto 1/r^2$$

und ist entlang der Verbindungsgeraden gerichtet.

Die Verallgemeinerung der Gleichungen auf mehr als zwei Körper erfolgt ganz analog. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen bilden ein abgeschlossenes, wohldefiniertes System von (partiellen) Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die momentanen Positionen $\mathbf{r}_j(t)$ aller betrachteten Körper. Dessen Lösung kann schon ab 3 beteiligten Körpern in den meisten Fällen nur mehr numerisch (mit Hilfe eines Computers) erfolgen.

Alle Lösungen der Newtonschen Bewegungsgleichungen sagen mathematisch nicht mehr aus als die Differentialgleichungen selbst. Die Differentialgleichungen sind das Axiom und die Lösungen sind die einzelnen Anwendungen (Beispiele). Es liegt eine Tautologie zwischen der Gesamtheit der Lösungen und den Differentialgleichungen vor (vgl. dazu Poincaré, „Science et l'hypothèse“).

Die Bewegung eines Planeten um die Sonne nach Newton

Für die Berechnung der Bahn eines Planeten kann man wegen der großen Masse der Sonne – die Sonnenmasse m_S ist rund 100.000 mal größer als die Gesamtmasse der Planeten – die Sonne als ruhend betrachten und die übrigen Planten außer Acht lassen. Die Bewegungsgleichung für einen Planeten im Schwerefeld der Sonne lautet dann:

$$m_P \frac{d^2 \mathbf{r}_P}{dt^2} = \frac{G m_P m_S}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_S|^3} (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_S).$$

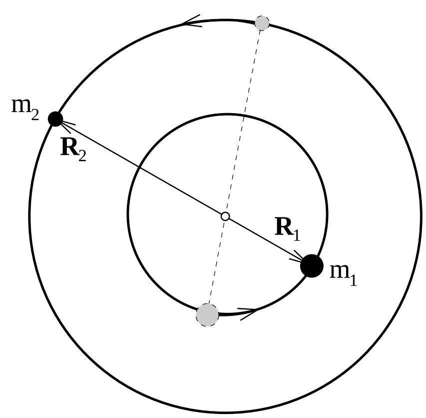
[12]Es ist für das Weitere nicht wichtig die Operation $\partial/\partial\mathbf{r}$ zu kennen oder zu verstehen. Dass die beiden Gleichungen in dieser Form geschrieben werden können, ist eine Konsequenz des dritten Newtonschen Gesetzes für gegenseitige Kraftwirkungen: Actio = Reactio.

Für die Bewegung eines Planeten um die Sonne wird die Bewegungsgleichung unten explizit angegeben.

Die Lösungen dieser Bewegungsgleichung sind Kegelschnittlinien (Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln). Welche Bahnform auftritt, hängt von den Anfangswerten für den Ort und die Geschwindigkeit des Planeten ab. Für gewisse Anfangsbedingungen findet man Ellipsenbahnen mit der Sonne in einem der beiden Brennpunkte. Diese Bahnen erfüllen auch die beiden anderen Keplerschen Gesetze. Somit erklärt die Newtonsche Theorie die drei Keplerschen Gesetze. Darüber hinaus werden die Quadrate und die dritten Potenzen im 3. Keplerschen Gesetz verständlich: Sie sind eine Konsequenz der Invarianz der Bewegungsgleichungen unter gleichzeitigen Änderungen der Längen- und Zeiteinheiten ('Mechanische Ähnlichkeit'). Was der Ansatz von nur zwei beteiligten Körpern nicht leistet, ist eine Erklärung warum gerade diese neun Bahnen der Planeten realisiert sind, d.h. warum die Verhältnisse zwischen den Bestimmungsstücken der Bahnen so und nicht anders sind (es gibt unendlich viele weitere Lösungen); Keplers Versuch der Erklärung und das schon erwähnte Titius-Bode-Gesetz finden keine Entsprechung. Eine Erklärung liefert vermutlich die Berücksichtigung des Einflusses weiterer Planeten auf die Bewegung. Wir beschränken uns im Folgenden auf einen weiteren Planeten.

Das eingeschränkte 3-Körperproblem

Wenn man die Newtonschen Gleichungen für die gravitative Wechselwirkung von drei Körpern untersucht, dann stellt man zunächst fest, daß dieses System von Gleichungen im allgemeinen nicht analytisch lösbar ist. Um überhaupt ein Gefühl für die Bewegung von drei Körpern zu bekommen, betrachtet man daher einen einfacheren Grenzfall, das sogenannte eingeschränkte 3-Körperproblem. Bereits in diesem weist die Bewegung einen neuen Wesenszug auf: Sie kann irregulär (chaotisch) und daher – weil die Momentangeschwindigkeit und die momentane Position nie ganz genau bekannt sind – nicht längerfristig vorhersagbar sein. A fortiori gilt dies für ein beliebiges System von drei oder mehr Körpern. Warum werden dann keine irregulären Planetenbahnen beobachtet, sondern nur regelmäßige?

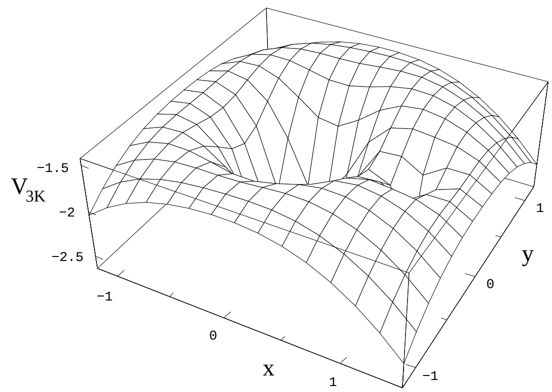


Die Voraussetzungen des sogenannten eingeschränkten 3-Körperproblems sind: Drei Körper m_1, m_2 und m sollen sich stets in einer festen Ebene bewegen[13]; der Körper m hat eine wesentlich geringere Masse als jeder der beiden anderen Körper, m_1 und m_2; daher wird die Bewegung der schweren Körper aufgrund ihrer großen Massen nicht von jener des leichten beeinflußt, sodass sich die beiden schweren Körper unter der wechselseitigen Anziehung praktisch auf Kepler-Bahnen um einander bewegen; diese Bahnen sollen Kreisbahnen sein (vgl. die Bahnen der Körper m_1 und m_2 in der vorigen Abbildung). Gesucht ist

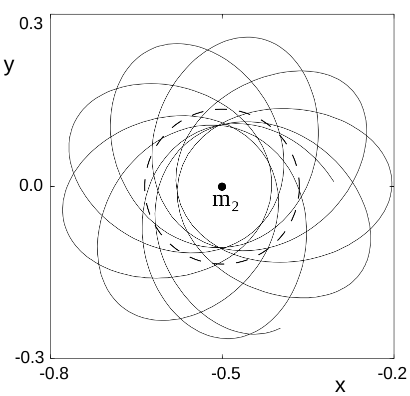
[13] Diese Forderung ist mit den Bewegungsgleichungen verträglich.

die Bahn des leichten Körpers m, der sich unter dem Einfluß der beiden schweren Körper bewegt.

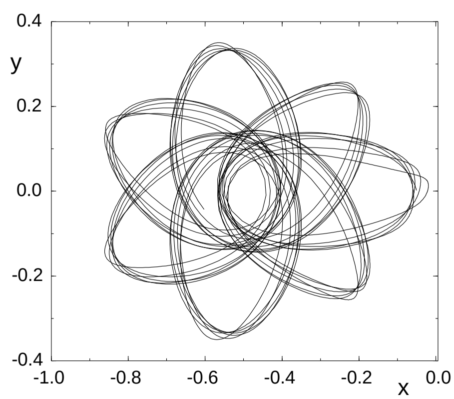
Es ist vorteilhaft die Bewegung des leichten Körpers in einer Ebene, der xy-Ebene, deren Koordinatenachsen mit den beiden großen Körpern mitrotieren, zu betrachten. Das Potenzial V_{3K} (d.h. die 'Berge und Täler'), in welchem sich der leichte Körper m bewegt, zeigt die folgende Abbildung:



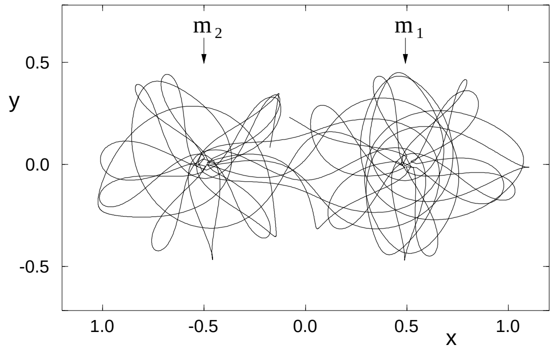
Die Gleichung für die Bewegung des leichten Körpers ist nicht integrabel (d.h. sie ist nicht mit analytischen Methoden lösbar) sondern nur einer numerischen Lösung zugänglich. In den folgenden drei Abbildungen sind Bahnen des leichten Körpers für verschiedene Werte der Energie dargestellt. Für geringe Energien verläuft die Bahn des leichten Körpers alleine um einen der schweren Körper:



Die Bewegung scheint regelmäßig zu sein. Für zunehmende Energie erfolgt die bereits offensichtlich etwas 'unregelmäßige' Bewegung in einem bandartigen Bereich:

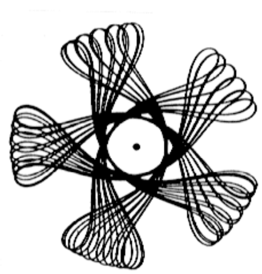


Und schließlich bewegt sich der leichte Körper um beide schweren Körper vollkommen unregelmäßig – eben chaotisch:



Die Form der Bahn hängt dann extrem sensitiv von den Anfangswerten für Ort und Geschwindigkeit ab. Diese Eigenschaft der Bewegung, zusammen mit der faktischen Unmöglichkeit die Position und die Geschwindigkeit des Körpers exakt vorzugeben[14], bewirkt, dass eine Vorhersage des Bahnverlaufes des leichten Körpers unmöglich ist.

Es gibt aber auch weiterhin vereinzelt regelmäßige, harmonisch wirkende Lösungen, wie z.B. jene in der Abbildung unten dargestellte, bei der sich der leichte Körper nur um einen schweren Körper bewegt. Derartige Bahnen sind bisher in der Natur nicht vorgefunden worden. Da wir aber die Bewegung allgemein – d.h. ihre Gesetzmäßigkeit – kennen, kann man sagen, dass die Natur nicht alle ihre Möglichkeiten zu realisieren scheint.



Um zu verstehen wieso einerseits die regelmäßigen Keplerbahnen und andererseits das chaotische Verhalten Resultate derselben Gesetze sein können, führt man eine sogenannte störungstheoretische Untersuchung durch. Man geht dazu von einem (analytisch) lösbaren System aus, man betrachtet also z.B. zunächst nur den schwersten, m_1, und den leichtesten Körper m alleine. In diesem System gibt es nur Kepler-Ellipsen als Bahnen, wobei die Bahn des schweren Körpers – je nach Massenverhältnis – viel kleiner ist als jene des leichten Körpers. Dann nimmt man den dritten Körper hinzu und untersucht die dabei entstehenden Änderungen der Bahnen. Das Resultat ergibt sich aus dem sogenannten KAM-Theorem; in einer vereinfachten Form lautet es in unserem Fall:

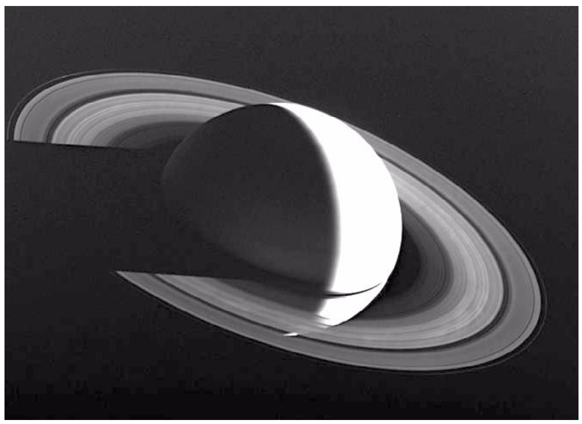
Man betrachte zunächst die beiden Situationen, dass sich einmal der leichteste Körper m und dann der weniger schwere Körper m_2 um den schwersten Körper m_1 auf Kepler-Bahnen bewegen. Dann vergleiche man ihre Umlaufszeiten. Die Kepler-Bahnen des leichtesten Körpers um den schwersten sind besonders anfällig gegenüber 'Störungen' durch den zweiten schweren Körper, wenn das Verhältnis der soeben bestimmten Umlaufszeiten rational ist.

Warum sind dann die Bahnen im Sonnensystem so unveränderliche Kepler-Ellipsen? Wahrscheinlich sind die Verhältnisse der Umlaufszeiten des jeweiligen Planeten zur jenen der anderen Planeten genügend irrational. Einen Hinweis auf eine solche Entwicklung findet man bei der Untersuchung der Struktur der Saturnringe.

[14] Bei Wiederholungen eines Vorganges kann nur sichergestellt werden, dass die jeweiligen Anfangswerte von Ort bzw. Geschwindigkeit innerhalb der Genauigkeit der Präparation übereinstimmen.

Die Selektion der Harmonie: Die Saturnringe

Die Saturnringe, die sich von seinem Äquator bis zum 2.28-fachen seines Radius erstrecken, bestehen aus kleinen Materiebrocken. Die Struktur der Ringe (vgl. die Abb.) kann man schon ungefähr verstehen, wenn man die einzelnen Teilchen des Ringes als nur unter dem Einfluß des Saturns und eines Saturnmondes (Mimas, mit dem Abstand von 3.1 Saturnradien) befindlich betrachtet. Aus der vorangehenden Diskussion des eingeschränkten 3-Körperproblems erwarten wir i.a. eine chaotische Bewegung, also keine stabilen Bahnen der Teilchen um den Saturn. Nach dem KAM-Theorem ist eine Bahn chaotisch, wenn das Verhältnis zwischen der Umlaufsfrequenz des Materiebrockens und der Umlaufsfrequenz von Mimas rational ist; solche Teilchen verschwinden aufgrund der Instabilität der Bahn aus dem Bereich des Saturn. Es bleiben nur jene Teilchen, die sich auf die Bahnen mit (genügend) irrationalen Verhältnissen befinden. Dieses Bild stimmt mit der Massenverteilung im Ring überein: Die Verteilung hat Minima bei Bahnen mit rationalen Verhältnissen der Umlaufsfrequenzen (Sphärenharmonie!).



Mit freundlicher Genehmigung von NASA/JPL/Caltech

Harmonie im Mikrokosmos

Im atomaren Bereich ist es nicht mehr möglich ein Teilchen als ein Objekt (z.B. als Punkt) aufzufassen, dem eine genaue Position und eine bestimmte Geschwindigkeit zugeschrieben werden kann. In einem Beugungsexperiment tritt der Wellencharakter dieses atomaren Etwas, des ‘Wellchens’ (= Welle und Teilchen), zutage. Mit der Welleneigenschaft verbunden ist eine fundamentale Unbestimmtheit des Ortes und des Impulses. Das ‘Teilchen’ hat nur mehr gewisse Wahrscheinlichkeiten sich am Ort $\mathbf{r}$ zu befinden und den Impuls $\mathbf{p}$ zu besitzen. Beide Wahrscheinlichkeiten sind durch die **Zustandsfunktion** $\Psi(\mathbf{r})$, die sich aus der Schrödinger-Gleichung ergibt (s. unten), bestimmt[15]. Beispielsweise ist $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ die Wahrscheinlichkeit das Teilchen am Ort $\mathbf{r}$ zu finden.

Die Schrödinger-Gleichung

Die Zustände von zwei Teilchen werden durch eine Zustandsfunktion $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ beschrieben: $|\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit die Teilchen jeweils an den Orten $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ zu finden. Die Bereiche mit den größten Wahrscheinlichkeiten entsprechen den klassischen Positionen

[15] Ψ wird meist als Wellenfunktion bezeichnet.

der Teilchen. Die Zustandsfunktion $\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ ist eine Lösung der **Schrödinger-Gleichung**

$$H\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = E\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2),$$

wobei der Hamilton-Operator H (bis auf eine geänderte mathematische Bedeutung von Ort und Impuls; sie sind nunmehr Operatoren) die Form der bereits oben erwähnten Größe H hat,

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} + V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|),$$

und E die Energie der Teilchen ist. Bei Atomen und Molekülen ist die **Coulomb-Wechselwirkung**

$$V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

zwischen den Ladungen q_1 und q_2 zweier Teilchen die weitaus stärkste Wechselwirkung. Die gesamte Wechselwirkung von mehr als zwei Teilchen setzt sich zusammen aus allen Wechselwirkungen zwischen jeweils zwei Teilchen.

Atome

Ein **neutrales Atom** besteht aus einem Z-fach positiv geladenen Kern ($q_1 = Ze$, e ist die elektrische Elementarladung), aufgebaut aus Z Protonen und einer Anzahl N ($N > Z$) Neutronen, und aus Z negativ geladenen Elektronen (jeweils Ladung $-e$). Dementsprechend ist nun die Anzahl der im Hamilton-Operator auftretenden Beiträge. In der Coulomb-Wechselwirkung V_{Ke} zwischen dem Atomkern (mit der 'Koordinate' $\mathbf{R}$) und jeweils einem Elektron (dem i-ten mit der 'Koordinate' $\mathbf{r}_i$) ist nun $q_1 = Ze$ und $q_2 = -e$ zu setzen,

$$V_{Ke}(|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|) = -\frac{Ze^2}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|}, \qquad i = 1, 2, \ldots, Z,$$

während sich jedes Paar von Elektronen (z.B. das i-te und das j-te Elektron) gemäß der Wechselwirkung ($q_i = q_j = -e$)

$$V_{ee}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, Z,$$

abstoßt. Die gesamte Wechselwirkung besteht nun aus den anziehenden Wechselwirkungen zwischen dem Kern und den Z Elektronen, sowie den abstoßenden Wechselwirkungen aller Elektronen, sodass, inklusive der kinetischen Energie T_e der Elektronen, der Hamilton-Operator[16]

$$H_{Atom} = T_e + \sum_e V_{Ke} + \sum_e V_{ee}$$

die Zustände der Elektronen[17] $\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_Z)$ über die Schrödinger-Gleichung

$$H_{Atom}\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_Z) = E\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_Z)$$

---

[16] Explizit ist:

$$H_{Atom} = \sum_{i=1}^{Z} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_e} - \sum_{i=1}^{Z} \frac{Ze^2}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_i|} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{Z} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

[17] Auch in einem Atom kann der Kern aufgrund seiner großen Masse als ruhend betrachtet werden. In der Zustandsfunktion Ψ treten daher nur die Koordinaten der Elektronen $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_Z$, bezogen auf den Atomkern, auf.

bestimmt. Für eine genaue Berechnung der atomaren Zustände muß man noch weitere Effekte berücksichtigen. Die Resultate stimmen dann beispielsweise mit den spektroskopischen Befunden sehr gut überein.

Die Struktur von Molekülen

Atome sind die Bausteine größerer mikroskopischer Systeme, der Moleküle. Die Berechnung der Struktur von Molekülen ist wesentlich komplizierter als die Berechnung der atomaren Zustände; dies trifft insbesondere für die Zustände großer Moleküle, z.B. von Polymeren, zu. Moleküle scheinen auf einen ersten Blick den Planetensystemen im Kosmos zu entsprechen.

Alle makroskopischen Eigenschaften der uns umgebenden Materie (Gase, Flüssigkeiten, Festkörper) folgen alleine aus ihren Bausteinen, den Atomen und deren Wechselwirkung. Für unsere Zwecke ist es ausreichend, ein Atom als geladenen Kern umgeben von einer gewissen Menge von geladenen Teilchen (den Elektronen) aufzufassen. Die quantenmechanische Behandlung dieser Bestandteile alleine erlaubt es die Strukturbildung der Atome zu Molekülen qualitativ zu erklären.

Der Hamilton-Operator für ein neutrales Molekül aus M (möglicherweise verschiedenen) Kernen und einer entsprechenden Anzahl von N Elektronen besteht[18] aus den kinetischen Energien der Kerne und der Elektronen, T_K und T_e, sowie aus den Coulomb-Wechselwirkungen zwischen den Elektronen, V_{ee}, den Kernen und den Elektronen, V_{Ke}, und zwischen den Kernen, V_{KK},

$$H_{Molekül} = T_K + T_e + \sum_K V_{KK} + \sum_{K,e} V_{Ke} + \sum_e V_{ee}.$$

Die Zustandsfunktion $\Psi\left(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_M; \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N\right)$ dieser Ansammlung von submikroskopischen Bausteinen mit der Energie E ist eine Lösung der Schrödinger-Gleichung

$$H_{Molekül}\Psi = E\Psi.$$

Die Berechnung von Ψ ist nur näherungsweise möglich. Es ergeben sich stationäre Positionen $\mathbf{R}_1^0, \ldots, \mathbf{R}_M^0$ der Atome (Ionen), fixiert durch das ‘Gelee’ der Elektronen.

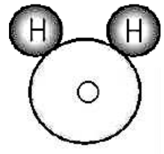
Der Weg zur Berechnung der Strukturen ist zwar klar, aber überaus kompliziert. Außerdem sind für eine quantitative Übereinstimmung die Spins[19] der Teilchen zu berücksichtigen. Dies ändert nichts an der prinzipiellen Existenz von Gleichgewichtskonfigurationen der beteiligten Atome. Die resultierenden Strukturen und damit die Schönheit (und Harmonie) der möglichen Anordnungen der Atome zu Molekülen kann man dem Hamilton-Operator $H_{Molekül}$ nicht ansehen: von der einfachen Struktur des lebenswichtigen Wassermoleküls,

---

[18]Der Hamilton-Operator für ein neutrales Molekül aufgebaut aus M Kernen (Ladung $Z_\alpha e$, $\alpha = 1, \ldots, M$) und $N = Z_1 + \ldots + Z_M$ Elektronen lautet (unter Beschränkung auf die Coulomb-Wechselwirkung):

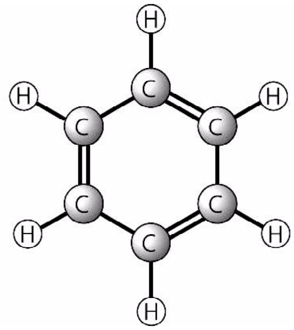
$$H_{Molekül} = \sum_{\alpha=1}^{M} \frac{\mathbf{P}_\alpha^2}{2M_\alpha} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_e} + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha<\beta}}^{M} \frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{|\mathbf{R}_\alpha - \mathbf{R}_\beta|} - \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} \frac{Z_\alpha e^2}{|\mathbf{R}_\alpha - \mathbf{r}_i|} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

[19]Der Spin ist eine rein quantenmechanische Eigenschaft der Elektronen und Kernbausteine.



H_2O: Wasser

über den Benzolring als elementare Struktur der organischen Chemie,

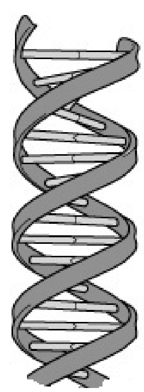


C_6H_6: Benzolring

sowie dem C_{60}-Molekül als Objekt einer neuen Forschungs- und Technologierichtung (Fullerene)

C_{60}, die 60 Kohlenstoffatome befinden sich in den Ecken dieses abgeschnittenen Ikosaeders

bis zur DNA, einem Riesenpolymer, welches aus 4 wiederholt in der Form einer Doppelhelix angeordneten Molekülgruppe (Adenin, Guanin, Cytosin und Thymin) besteht,



Die DNA-Struktur (Ausschnitt)

als Grundlage von Organismen. Alle diese Strukturen sind auch Lösungen von Schrödinger-Gleichungen.

Resümee

Diese beiden Ausflüge in den Makro- und in den Mikrokosmos zeigen neben der Harmonie wesentliche Unterschiede zwischen beiden Ebenen auf (die Spekulation über die Einheitlichkeit von Makro- und Mikrokosmos des N. v. Kues trifft nicht zu). Im Mikrokosmos ist die maßgebliche Coulomb-Wechselwirkung sowohl anziehend als auch abstoßend: Aufgrund des Wechselspiels zwischen anziehender (Elektronen-Kerne) und abstoßender (Kerne-Kerne, Elektronen-Elektronen) Kraft gibt es statische Gleichgewichtspositionen der Atomkerne; diese etablieren die Molekülstruktur. Hingegen gibt es keine ‘kosmischen Moleküle’. Das liegt daran, dass in diesem Bereich die Gravitation, die stets anziehend wirkt[20], die dominante Wechselwirkung ist. Nur sich relativ zueinander bewegende Sterne können ein stabile Systeme wie Sonnensysteme oder Galaxien bilden; statische Konfigurationen würden kollabieren. Die kosmischen, durch die Schwerkraft bedingten Strukturen sind dynamischer Natur: Die Stabilität unseres Planetensystems beruht auf der Bewegung der Planeten.

Aus physikalischer Sicht zeigt sich, dass in der Natur oft ein dialektisches Wechselspiel zwischen Harmonie und Chaos besteht. Und selbst dies ist differenziert: Auch in als harmonisch erkannten Bereichen gibt es Chaos und umgekehrt birgt Chaos harmonische Strukturen in sich. Harmonie macht sich nur in der Differenz zu Nichtharmonischem bemerkbar.

Nachsatz: Die $\int$ntegrale strecken ihre Hälse aus den Berechnungen der Bahnen und Zustände heraus.

[20] In einem ‘Dreiladungsproblem’ mit drei Ladungen und Coulomb-Wechselwirkung stoßen sich stets mindestens zwei Ladungen ab.