

Auf den Schultern von Giganten[†]

Harald Iro

Mein Essay über die Zusammenhänge und die Entwicklung von physikalischen Ideen und Bildern muß natürlich, schon wegen der vorgegebenen Länge, unvollständig sein. Ebenso wenig kann ich auf historische Genauigkeit pochen; dies auch deshalb, weil eine halbwegs vollständige Sammlung von Literatur in der mir zur Verfügung stehenden Zeit nicht erreichbar und schon gar nicht nachvollziehbar war. Ich mußte mich daher weitgehend auf eine Auswahl verlassen und beschränke mich außerdem auf das mechanische und astronomische Vermächtnis der erwähnten Personen.

Außerdem erfordert es mein Zugang, daß ich den vorgegebenen Zeitrahmen – von Peurbach bis Newton – überschreite und Newtons Vermächtnis teilweise miteinbeziehe. Die nach Newton erfolgte mathematische Formulierung seiner Bewegungsgesetze in Form von Differentialgleichungen ermöglicht einen direkteren Zugang und eine einfachere Anwendung. Die Gleichungen sind die Basis für das quantitative Verständnis der Bewegung von Gestirnen und Planeten, sowie von künstlichen Planeten, den Satelliten und Raumfahrzeugen. Mit ihren Lösungen beschäftigen sich Physiker, Astronomen und Mathematiker seit nunmehr dreihundert Jahren. Dies erforderte große Anstrengungen. Der Lohn dafür waren vielerlei physikalische und mathematische Einsichten. Erst Schrödingers und Heisenbergs Quantenmechanik sowie Einsteins Relativitätstheorie bewirkten vergleichbare Veränderungen des Fundaments der Physik.

Das Newtonsche Werk beruht, wie sich Newton in einem Brief an Hooke ausdrückte, auf den Schultern von Giganten. Genannt werden in der Literatur (s. u.a. [Lagrange], [Mach], [Wawilow], [Simonyi]) übereinstimmend Galilei, Huygens und auch Hooke sowie Descartes als eminente Wegbereiter für Newtons Hauptwerk "Philosophiae naturalis Principia mathematica" [Newton]. Galilei hat die Dynamik in die Mechanik eingeführt, die bis dahin nur aus der Statik, d.i. die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte, bestand [Lagrange]. Nach Descartes bedarf es einer Kraft um die Größe der Bewegung (Masse mal Geschwindigkeit) zu ändern; er interessierte sich für den elastischen Stoß und stellte Überlegungen über die Vermittlung von Kräften an, da er die Fernwirkung ablehnte – nicht zu Unrecht wie wir heute wissen. Und Huygens hat bereits die Bewegung in verschiedenen Vorgängen, insbesondere beim Pendel untersucht (hier hat schon Galilei die Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Auslenkung des Pendels erkannt); er löst die ersten Aufgaben der Dynamik mehrerer Massen [Mach]. Hooke stellte Überlegungen zur Gravitation an, die aus Mangel an mathematischen Fähigkeiten eher qualitativ waren, aber dennoch einige erstaunliche Erkenntnisse enthalten.

Daß Keplers Gesetze wesentlich für Newton waren, ist ebenfalls unbestritten. Aber darauf darf man Keplers Rolle nicht beschränken. Ich glaube, daß er darüber hinaus, wie Galilei, die naturwissenschaftlichen Vorstellungen und Methoden grundlegend formte. Im Folgenden möchte ich unter den oben erwähnten Vorgängern Newtons nur auf Keplers Werk näher eingehen.

An den Keplerschen Gesetzen überprüft, ermöglicht die Newtonsche Theorie aufgrund ihrer Universalität ein weitergehendes Verständnis der Vorgänge im Kosmos als dies im

[†]'If I have seen further it is by standing on the shoulders of giants.' Aus einem Brief Newtons an R. Hooke, 1676. Der Aphorismus stammt nicht von Newton; er ist älter und wurde vermutlich von Bernhard von Chartres um 1100 geprägt (R.K. Merton, Auf den Schultern von Riesen, Suhrkamp, Frankfurt 1983).

Rahmen der Keplerschen Gesetze möglich wäre. Dies erweist sich schon in den mit Newtons Studium des Systems Sonne, Mond und Erde einsetzenden Untersuchungen der Wechselwirkung von mehr als zwei Körpern.

1 Keplers Schultern

Wegbereiter der neuzeitlichen Vorstellung über die Bewegung von Gestirnen waren Kopernikus und Kepler. Kopernikus verbannte die Erde aus ihrer bevorzugten Stellung unter den Himmelskörpern um derentwillen die etwas auswuchernde Epizyklen­theorie eingeführt wurde. Und Kepler gab durch seine Gesetze den endgültigen Anstoß für Newtons bahnbrechenden Zugang.

Ich habe den Eindruck, daß Kepler – vielleicht nur unter Physikern – in neuerer Zeit im Vergleich zu Newton und den anderen Atlanten Newtons unterschätzt wird. Früher wußte man sehr wohl darüber Bescheid, siehe beispielsweise G.C. Lichtenberg, für den Kepler aufgrund seiner "gewagten Ideen, seines prophetischen Blickes, seines dichterischen Zuges und seiner Äußerungen des sonderbarsten, oft glücklichsten Witzes zu den größten und außerordentlichen Menschen zählt, die die Welt je gesehen hat" (etwas abgeändertes Zitat aus den Lichtenbergschen Sudelbüchern). Beeinflußt durch Lagrange [Lagrange] und noch mehr durch Machs [Mach] historische Darstellung der Mechanik war auch ich der Meinung Keplers Gesetze sind zwar eine großartige Leistung, aber ihre Zusammenfassung in den Newtonschen Bewegungsgleichungen ist weit höher einzuschätzen. Mach berücksichtigt sehr ausführlich die 'irdischen Wurzeln' der Dynamik, Galilei und Huygens, vernachlässigt aber fast vollständig den Himmelsmechaniker Kepler; diesen erwähnt er nur zusammen mit seinen drei Gesetzen. Ich glaube, daß dies ein Mangel in einer Darstellung der Entwicklung der Mechanik ist: "Man darf ihm (d.h. Kepler) nicht, wie es so manche tun, zum Schmuck der Wissenschaft die schönsten Federn (d.h. seine Gesetze) ausziehen, um ihn dann wieder fliegen zu lassen." (Caspar in [Kepler, Weltharmonik]).

Erst nach genauerer Beschäftigung mit einschlägiger Literatur (Biographien, etc.), der "Neuen Astronomie" und der "Weltharmonik" meine ich nun zu erkennen, wie groß Keplers Leistung wirklich war – und was andererseits zu Newtons Zeit schon 'in der Luft gelegen' ist, wie Keplers Erkenntnis, daß die Sonne für die Planetenbewegung verantwortlich ist oder Descartes Form von Newtons erstem Gesetz. Während Kepler seine Überlegungen und Irrwege offenlegt – in seiner "Astronomia Nova" läßt Kepler den Leser teilhaben an seiner Suche nach Erkenntnis, manchmal in sehr emotionaler Weise – scheint Newton seine Quellen eher zu verschweigen. Bei Kepler treten vor dem Leser Einfälle – wie beispielsweise der Einfluß des Lichtdruckes der Sonne auf die Mondbewegung – und Widersprüche – z.B. nehmen einmal die Planeten aktiv an der Bewegung teil, dann sind sie wieder der Anziehung der Sonne ausgesetzt – nebeneinander auf.

Die Entstehung von Keplers Weltbild, dessen Wurzeln und weiters seine Wirkung darzulegen ist sehr komplex und erfordert akribische Untersuchungen eines kaum abzuschätzenden Umfanges an Literatur. Ob ein solches Unterfangen in einigermaßen vollständiger Weise möglich ist, bin ich mir nach meinen nunmehr gemachten Erfahrungen nicht mehr sicher. Einfacher ist es den für die Physik unmittelbar relevanten Anteil seiner Werke aufzusuchen und darin insbesondere die Keplerschen Gesetze und die Kepler-Gleichung.

1.1 Ausgewählte Werke Keplers

Mysterium Cosmographicum (Weltgeheimnis)

erschien 1596 in Tübingen; zweite Auflage 1621 in Frankfurt (also nach der eher naturwissenschaftlichen "Astronomia Nova" und der "Harmonice Mundi"). Das zentrale Thema ist ein Modell für die damals bekannten sechs Planeten Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter und Saturn. Die Kugelschalen auf denen deren Bahnen als Großkreise liegen, umschreiben der Reihen nach die fünf platonischen Körper¹: Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder, Tetraeder (Pyramide), Hexaeder (Würfel). In seiner Erklärung der Planetenbahnen durch die Schachtelung von Kugeln zwischen den platonischen Körpern argumentiert Kepler teils naturphilosophisch und teils mit einer erkannten göttlichen Ordnung. Sein Versuch entsprang dem Bedürfnis Harmonie im Universum aufzuzeigen. Dieses Thema hat er später wieder aufgegriffen.

Astronomia Nova (Neue Astronomie)

erschien 1609 in Prag. Zentrales Thema ist die Bewegung und die Bahn des Mars, die im Vergleich zu den anderen Planeten etwas komplizierter sind. Enthält die beiden ersten Gesetze, wenn auch das zweite in anderer Form als heute verwendet. Einzigartiges Protokoll von Modell- und Theorienbildung auf der Basis von Tycho Brahes astronomischen Daten: Kepler läßt den Leser an seinem Erkenntnisprozeß teilhaben. Dieses Werk markiert, zusammen mit Galilei, den Beginn der naturwissenschaftlichen Methode.

Fünf Teile: I. Teil: Diskussion der ptolemäischen und kopernikanischen Hypothese, deren Grenzen insbesondere im Hinblick auf die Sonnenbewegung. II. Teil: Eigenschaften der Marsbahn. III. Teil: Bewegt sich die Sonne oder die Erde? zweites Gesetz; die magnetische Bewegungskraft der Sonne (es gibt "Magnete am Himmel" (Kap. 34)). IV. Teil: Diskussion der Planetenbahnen; Ellipsenbahn; das Keplersche Problem (s.u.). V. Teil: Weitere Details der Marsbahn und deren Erklärung durch das neue Weltsystem.

Harmonice Mundi (Weltharmonik)

erschien 1619 in Linz. Wieder beschäftigt sich Kepler mit dem Thema Harmonie. Fünf Bücher: I., geometrisches Buch: die regelmäßigen Figuren und harmonische Proportionen. II. Buch: über (Ober-)Flächen aus regulären Figuren. III., eigentlich harmonisches Buch: über die harmonischen Proportionen der "musikalischen Dinge". IV., metaphysisches, astrologisches Buch: Einwirkung der Harmonie der Strahlen der Himmelskörper auf Natur und Seele. V., astronomisches und metaphysisches Buch: die vollkommene Harmonie der Himmelsbewegung; harmonische Proportionen und die Exzentrizitäten der Planeten; 3. Gesetz.

Epitome Astronomiae Copernicanae (Abriß der Kopernikanischen Astronomie)

Sieben Bücher; der I. Teil (die Bücher 1-3) erschien 1618 in Linz, das 4. Buch 1620 in Linz und die Bücher 5-7 1621 in Frankfurt; Nachdruck 1635. Zusammenfassung (Epitome) der Kopernikanischen Astronomie mit Keplers Erweiterungen in der Form von Frage und Antwort; das erste moderne Lehrbuch der Himmelskunde (Caspar in [Kepler, Epitome (1991)]); die Bücher 1-3 enthalten die Prinzipien der Astronomie, die Allgemeine Astronomie, Verschiedenes über Erde und Himmel; die Bücher 4-7 enthalten die neue (Kopernikanische und Keplersche) Theorie, die "Physica Coelestis".

¹Seit Platon weiß man, daß es genau fünf reguläre konvexe Polyeder gibt. Ein Polyeder ist regulär, wenn seine Oberfläche aus regelmäßigen Vielecken (gleichseitiges Dreieck, Quadrat, ...) eines Typus besteht und in jeder Ecke gleich viele dieser Vielecke zusammenstoßen. Die Anzahl der regelmäßigen Vielecke ist im Namen des Polyeders enthalten.

Betreffend der Kugelschalen: s. Fußnote 2.

Tabulae Rudolphinae (Rudolfinische Tafeln)

erschienen 1627 in Ulm. Die Tabulae enthalten Daten für die Berechnung der Positionen der Planeten und übertreffen ihre Vorgänger um ein vielfaches an Genauigkeit. Die Tafeln begründeten wesentlich das Ansehen Keplers. Auf ihnen aufbauend berechnete er in den "Ephemerides Novae Motuum Coelestium" die Planetenpositionen für die Jahre 1629 bis 1636.

1.2 Keplers Modell der Planetenbahnen

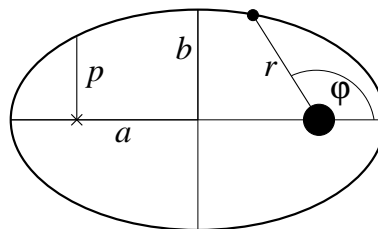
Ein Resultat Keplers lebenslanger Suche nach harmonischen Beziehungen und seiner Beschäftigung mit dem kopernikanischen, heliozentrischen Weltbild² ist sein Bild von Kugelschalen als Örtern der Planetenbahnen, wobei die Dimensionen der Kugelschalen durch Schachtelung platonischer Körper festgelegt sind (die überaus bekannte Abbildung kann man z.B. in [Pichler] finden). Die Übereinstimmung dieser Erklärung mit der Beobachtung wurde lange Zeit von Naturwissenschaftlern als zufällig, wenn nicht sogar als mystischer Humbug abgetan. Aus heutiger Sicht ergibt sich aber ein Moment, welches unglaubliche Aktualität besitzt. Darauf komme ich am Ende meines Beitrages zurück.

1.2.1 Die Keplerschen Gesetze

Die nachfolgenden Gesetze³ sind Keplers Formulierungen seiner entsprechenden Erkenntnisse über die Planetenbewegung. Das erste und dritte ist "Harmonice Mundi" [Kepler, Weltharmonik] in der heute üblichen Numerierung entnommen (In der "Astronomia Nova" beschäftigt sich Kepler zuerst mit verschiedenen Vorläuferversionen des zweiten Gesetzes und formuliert danach das erste; die Zitate sind nicht ganz wörtlich). Es gibt mehrere Textstellen, die als Vorläufer des zweiten Gesetzes gelten können. Doch eine exakte Version scheint Kepler erstmals in "Epitome" (V. Buch, [Kepler, Epitome]) anzugeben⁴.

Erstes Keplersches Gesetz:

Die Bahn eines Planeten ist elliptisch und die Sonne, die Quelle der Bewegung, steht in einem Brennpunkt dieser Ellipse.



²Kepler erwähnt im 2. Kapitel der "Astronomia Nova" bei der Gegenüberstellung der Ptolemäischen Epizyklen und der Kopernikanischen Exzenter auch G. Peurbach (1423-1461, "Theoricae novae Planetorum") als Vertreter Aristotelischer Ideen. Wenn er dann in der "Harmonice Mundi" seine Theorie darlegen will, rät er dem Leser zu Beginn des 3. Kapitels des V. Buches die durch Peurbach überlieferten "alten astronomischen Hypothesen des Ptolemäus von unserer Betrachtung auszuschließen und ganz aus dem Sinn zu schlagen sind."

Peurbach geht in seiner "Theoricae" über die rein deskriptive Darstellung des Ptolemäus hinaus und führt als Erklärungsmodell die Sphären ein (Caspar in [Kepler, Neue Astronomie]).

³Eigenschaften der Planetenbahnen, die hier als erstes und zweites Gesetz auftreten, veröffentlichte Kepler schon in seinem Werk "Astronomia Nova". Aber eine der heutigen Version vergleichbaren, exakte und kompakte Formulierung des zweiten Gesetzes ist darin nicht zu finden [Gingerich].

⁴Zu der entsprechenden Stelle bemerkt Caspar [Kepler, Epitome 1991]: "Hier spricht Kepler in klarer und bestimmter Form das zweite seiner Planetengesetze, den Flächensatz, an."

Die Gleichung einer Ellipse lautet (in Polarkoordinaten, vgl. die Abbildung):

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}; \quad (1)$$

hier ist r der Abstand zur Sonne (Brennpunkt) und φ gibt den Winkel zwischen Perihel (sonnennächster Bahnpunkt) und momentaner Lage an. Die numerische Exzentrizität e ist kleiner als Eins (Kreis ($e = 0$))

$$e < 1;$$

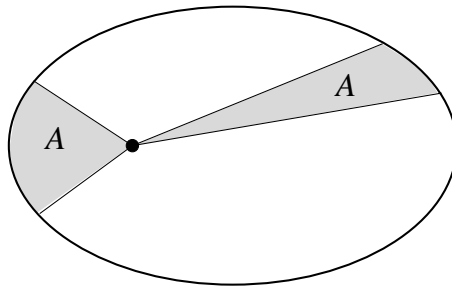
e und der Parameter p sind durch die Halbachsen der Ellipse a und b (vgl. die obige Abbildung) bestimmt

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (2)$$

Zweites Gesetz:

Ein Maß für die zwischen zwei Bahnpunkten eines Planeten verstrichene Zeit ist die vom Radiusvektor überstrichene Fläche. Der Radiusvektor zu einem Planeten geht von der Sonne aus⁵.

Die heute gebräuchliche Form dieses Gesetzes lautet: *Der von der Sonne nach einem Planeten gezogene Radiusvektor beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*



Die mathematische Formulierung dieser Aussage:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = const,$$

die Änderung der Fläche pro Zeiteinheit ist konstant.

Drittes Gesetz:

Die [logarithmische] Proportion, die zwischen den Umlaufzeiten irgend zweier Planeten besteht, ist genau das Anderthalbe der Proportion der mittleren Abstände [von der Sonne], d.h. der Bahnen selber.

⁵Das Originalzitat in "Epitome" nimmt auf eine Abbildung Bezug. Dies soll hier vermieden werden. Daher habe ich eine möglichst inhaltstreue, eigene Formulierung gewählt.

In der heute verwendeten mathematischen Form lautet dieses Gesetz:

$$T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3;$$

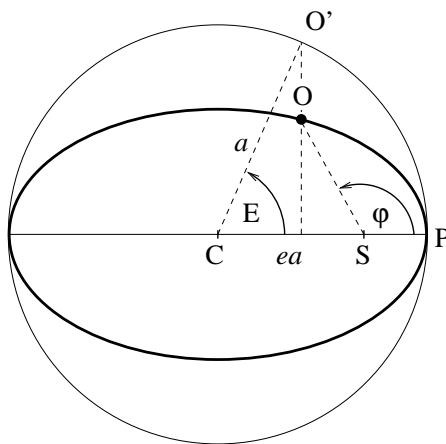
T_i sind die Umlaufzeiten und a_i die großen Halbachsen der Ellipsenbahnen zweier Planeten.

Diese Gesetze sind Summen von, aus den Beobachtungsdaten gewonnenen Erkenntnissen über die Bewegung der Planeten. Es lassen sich vermutlich noch weitere Zusammenhänge zwischen verschiedenen Parametern der Bewegung finden; daß danach auch heute gesucht wird, habe ich im Rahmen des letzten Peuerbach-Symposiums [Pichler] erfahren. Bei Vermutungen über Zusammenhänge sind der Phantasie keine Grenzen gesetzt; letztlich entscheidet die Fruchtbarkeit einer gefundenen Regelmäßigkeit. Diese äußert sich darin, daß sie die Auffindung einer neuen physikalischen Gesetzmäßigkeit fördert.

Die Gesetze betreffen nur die Bewegung, die Kinematik. Sie sagen nichts über die Ursache der Bahnformen und Eigenschaften der Bewegung aus. Kepler hat zwar die Erkenntnis gehabt, daß die Sonne die Ursache ist; dies ist aber kein notwendiger Bestandteil des ersten Gesetzes. Außerdem entwickelte bereits Kepler bemerkenswerte Vorstellungen über die Schwere von Körpern (vgl. den Abschnitt über Keplers Kraftbegriff). Erst Newton zieht aus den (Keplerschen?) Ideen weiterführende Schlüsse.

1.2.2 Die Kepler-Gleichung

Zur Bestimmung der Zeitpunkte⁶ zu denen ein Planet gegebene Positionen auf seiner Ellipsenbahn erreicht, kann man die Kepler-Gleichung verwenden (Kapitel 58-60 der "Astronomia Nova"). Die Zeiten sind in sogenannten Ephemeriden aufgelistet; ihre Berechnung ist sowohl für die Astronomie als auch für die Astrologie wichtig und war daher auch finanziell interessant.



In der Gleichung (1) der Planetenbahn sind sowohl der Radius r als auch der Winkel φ Funktionen der Zeit. Aus der Zeitabhängigkeit von φ ergibt sich die Positionen eines Planeten auf der Himmelskugel zu gegebenen Zeiten. Um die Zeiten zu bestimmen, stellte Kepler die Beziehung zu weiteren Größen her, die ebenfalls als Anomalien⁷ bezeichnet

⁶Man muß sich vergegenwärtigen, daß es bis zum Ende des 19. Jahrhunderts keine globale Zeit gab. Die Uhren zwischen verschiedenen Orten und sogar innerhalb eines Ortes wichen voneinander beträchtlich ab. Der Begriff der Gleichzeitigkeit hatte keine praktische Basis. (s. dazu P. Galison, Einsteins Uhren, Poincarés Karten, Fischer, Frankfurt 2003)

⁷Die historische Bezeichnung für den Winkel φ (zwischen Planetenposition O, Sonne S und Perihel P) ist wahre Anomalie.

werden (vgl. die obige Abbildung): Man betrachtet die exzentrische, $E = \angle O'CP$, und die mittlere, $M = 2\pi t/T$ ($T =$ Umlaufzeit), Anomalie. Nach einigen Überlegungen findet man zwei Gleichungen für diese Größen: Die Kepler-Gleichung setzt E mit der Zeit t in Beziehung

$$E - e \sin(E) = M = (2\pi)t/T \quad (3)$$

und die Gleichung

$$\tan(\varphi/2) = \sqrt{(1+e)/(1-e)} \tan(E/2) \quad (4)$$

ist eine Relation zwischen E und φ . Entweder bestimmt man $E(t)$ aus der ersten Gleichung (Keplersches Problem) und dann $\varphi(t)$ aus der zweiten, oder umgekehrt E als Funktion von φ und dann aus der Kepler-Gleichung die Zeit als Funktion von φ : $t = t(\varphi)$. Beim ersten Weg muß man beachten, daß die Kepler-Gleichung nicht in einfacher Weise nach E aufgelöst werden kann. $E(t)$ kann nur näherungsweise bestimmt werden.

Im zweiten Fall wird E als Funktion von φ betrachtet. Kepler wählt im 60. Kapitel der "Astronomia Nova" eine Näherung anstelle von (4). Für den Winkel⁸ $\angle OSO' =: \zeta$, gilt (s. die entsprechende Anmerkung von Caspar in [Kepler, Neue Astronomie])

$$\zeta \simeq \frac{e^2}{4} \sin 2\varphi$$

Mit der Beziehung

$$E = 2(\varphi - \zeta) - \pi$$

erhält man die exzentrische Anomalie. Eingesetzt in die Kepler-Gleichung ergibt sich zu jeder wahren Anomalie φ der Zeitpunkt zu dem diese erreicht wird.

Heute zieht man numerische, iterative Verfahren zur Lösung der Kepler-Gleichung oder eines Integralausdruckes für $\varphi(t)$ (s.u.) vor.

1.2.3 Die Unregelmäßigkeiten des Mondes

Schon Kepler spricht Unregelmäßigkeiten der Mondbewegung an. Der Einfluß der Sonne auf die Mondbewegung um die Erde zieht sich durch seine Werke. Im "Mysterium Cosmographicum" macht er darauf aufmerksam, daß auf den Mond auch die Sonne wirkt. In "Epitome" ist das Kapitel fünf des vierten Buches den zweierlei Unregelmäßigkeiten des Mondes gewidmet. Er bemerkt, daß sich zwar der Mond um die Erde bewegt analog zu den Planeten um die Sonne, daß er aber zusätzlich dem Einfluß der Sonne unterliegt [Kepler, Epitome].

1.3 Keplers Kraftbegriff

Der erste, der in Zusammenhang mit der Bewegung den bis dahin nur in der Statik verwendeten Kraftbegriff anwendete, war Galilei [Lagrange]. Kepler erkannte die Sonne als Ursache der Planetenbewegung. Seine Vorstellungen über den Ursprung der Kraft wandelten sich im Laufe der Zeit: von einer die Planetenbewegung verursachenden, den Planeten innewohnenden Seele, der "anima motrix" im "Mysterium Cosmographicum" über eine von der Sonne auf die Planeten einwirkende "species immateriata", die bereits

⁸Der Winkel $\angle PSO'$ heißt ausgeglichene Anomalie und es gilt:

$$\angle PSO' = \varphi - \zeta.$$

mathematischen Beziehungen gehorcht, in der "Astronomia Nova" bis zu einer dezidiert von der Sonne herrührenden Kraft im mechanischen Sinn in "Epitome". Kepler setzte eine magnetische Kraft an, die sich zusammen mit dem Sonnenlicht ausbreitet und die Drehung der Planeten durch die Rotation der Sonne bewirkt [Kepler, Epitome], [Jammer]. Zwar argumentiert Kepler einerseits, daß die Kraft wie das Licht von der Sonne mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt, findet aber andererseits für die mit der Sonne mitrotierenden Kraftstrahlen eine lineare Abhängigkeit (Caspars Anmerkung in [Kepler, Epitome (1991)]). In der zweiten Auflage von "Mysterium Cosmographicum" 1621 revidiert er die Auffassung von Seele in der ersten Auflage von 1596. Dieser Wandel stellt einen nicht hoch genug einzuschätzenden Beitrag zum naturwissenschaftlichen Weltbild dar.

In seinen Briefen äußerte Kepler bereits Ansichten, die aufhorchen lassen [Jammer]: So zieht eine schwerere Erde unsere Erde an, falls diese bezüglich der schwereren ruht, so wie dies der Fall ist bei einem Stein bezüglich der Erde. In einem weiteren Brief stellt er fest, daß nicht nur der Stein sich auf die Erde zubewegt, sondern auch die Erde auf den Stein zu. Allerdings führen auch diese Überlegungen zu keinen nachhaltigen Konsequenzen in seinen Werken.

2 Newtons "Principia"

Bezüglich der Mechanik und der Astronomie ist Newtons Hauptwerk seine "Philosophiae naturalis principia mathematicae" [Newton], kurz als "Principia" bezeichnet. 1687 war die Erstausgabe aller drei Bücher der "Principia" abgeschlossen; es erschienen zwei weitere, überarbeitete Auflagen: 1713 und 1726. Die Newtonschen Bewegungsgesetze und sein Gravitationsgesetz – erschlossen aus dem dritten Keplerschen Gesetz und dem Gesetz der Zentrifugalkraft der Kreisbewegung – sind die Grundlage der Astronomie und der Raumfahrt. Eine wesentlicher Fortschritt in der Mathematik, der von ihm selbst (parallel zu Leibniz) erzielt wurde, war die Infinitesimalrechnung⁹. In seinen "Principia" machte er allerdings von seiner Fluxionenrechnung nicht Gebrauch (s. auch [Dijksterhuis] und [Wawilow]). Nur ganz kurz geht er in einigen Lemmata (z.B. nach den vorausgeschickten Definitionen und Gesetzen der Bewegung zu Beginn des ersten Buches und Lemma II des zweiten Buches) auf elementare Tatsachen der Infinitesimalrechnung (insbesondere Grenzwertbildungen) ein, die er im weiteren benötigt.

Newton verzichtete auf eine Erklärung der Gravitationskraft – unterschiedlich zu Keplers 'Speichen der Sonne' bzw. magnetischer Kraftwirkung – und erschloß die bloße mathematische Form aus den Keplerschen Gesetzen.

Vor die drei Bücher seiner "Principia" setzt Newton einige Definitionen, ein Scholium (erläuternde Anmerkung), in dem die absolute Zeit und der absolute Raum¹⁰ definiert werden, und seine drei Gesetze, denen Korollare und ein weiteres Scholium folgen. Eingebettet in Newtons absolutem Raum und absoluter Zeit sind die Gesetze das Fundament der klassischen Mechanik. Der absolute Raum, schon unter Zeitgenossen nicht unumstritten, und die absolute Zeit werden einmal von Einstein entthront werden.

⁹Erst Euler verwendete 1738 konsequent die Infinitesimalrechnung in seiner "Mechanica" [Euler].

¹⁰Hier wird auch der berühmte Eimerversuch von Newton als Beweis für die Existenz eines absoluten Raumes angeführt.

2.1 Die Newtonschen Gesetze

Erstes Newtonsche Gesetz:

Jeder Körper ruht oder er bewegt sich gleichförmig¹¹, wenn er nicht durch eine Kraft gezwungen wird diesen Zustand zu ändern.

Das Gesetz beruht auf Arbeiten Galileis, der als erster die Kräfte in Zusammenhang mit Bewegung (und nicht – wie bis dato – im Rahmen der Statik) studiert und Krafteinflüsse in wesentliche und unwesentliche unterscheidet, und Descartes.

Zweites Gesetz:

Die Änderung der Bewegung ist proportional zur ausgeübten Kraft; sie erfolgt in jener geraden Richtung in welche die ausgeübte Kraft gerichtet ist.

Für einen Körper mit Masse m und Geschwindigkeit \mathbf{v} lautet es in mathematisch quantitativer Form bloß

$$\Delta \mathbf{p} \propto \mathbf{F},$$

wo der Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, die "Quantitas Motus" (Bewegungsgröße) Descartes', und die Kraft \mathbf{F} gerichtete Größen (Vektoren) sind. Das Gesetz ist die Urform der Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik. Die Bewegungsgleichung selbst wurde erst nach Newtons Tod entwickelt (s.u.).

Drittes Gesetz:

Zur jeder Einwirkung (actio) gibt es eine gleiche Reaktion: oder die gegenseitige Wirkung zweier Körper aufeinander ist stets gleich groß und entgegengesetzt gerichtet.

Versteht man die Kraft als Wirkung, dann gilt für die Kraft und die Gegenkraft zwischen zwei Körpern

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2.$$

2.2 Das erste und das zweite Buch der "Principia"

Am Beginn des ersten Buches stehen die oben erwähnten Lemmata, die Newton benötigt. Es werden Theoreme (Propositionen) über die Bewegung von Körpern unter dem Einfluß von "zentripetalen" Kräften dargelegt und bewiesen. Bereits Newton betrachtet Körper als Zusammensetzung von Teilchen (s. z.B. Buch I, Propositionen LXXXV und LXXXVI) und leitet damit Lehrsätze ab, z.B. über die Kraft zwischen Körper von unregelmäßiger (d.h. nicht kugelförmiger) Gestalt.

Mit den mathematischen Hilfsmittel der Lemmata leitet Newton viele Sätze (Propositionen) über die Bewegung von Körpern ab, insbesondere das zweite und dritte Keplersche Gesetz, weiters die Kraftgesetze für diverse Bahnen darunter auch das $1/r^2$ -Gesetz der "zentripetalen" Kraft für Ellipsenbahnen mit dem Kraftzentrum in einem Fokus, die Bewegung der sogenannten Apsiden einer Bahn etc. Die dabei angewendete mathematische Vorgangsweise ist uns heute fremd. Mach charakterisiert sie folgendermaßen: "Die alten Forscher fanden durch ihre Betrachtungsweise die Sätze meist in etwas schwerfälliger

¹¹Gleichförmig heißt mit konstanter Geschwindigkeit und Richtung.

Form von Proportionen" [Mach]. Die heute verwendete mathematische Form der Gesetze folgt nicht eindeutig aus ihnen (s. z.B. [Dijksterhuis]); vielmehr muß man seiner Erläuterungen und die geistige Situation zur Zeit Newtons berücksichtigen um die heutige Form (s.u.) der Gesetze zu rechtfertigen. Der neue, analytische Zugang über Differentialgleichungen wurde von Euler in seiner sogenannten ersten Mechanik [Euler] 1736 eingeleitet. Er verwendete das neue Infinitesimalkalkül und formulierte die Gesetze der Bewegung in Form von Differentialgleichungen.

Der Inhalt des zweiten Buches der "Principia": über die Bewegung von Körpern in Medien, über die Bewegung von Flüssigkeiten.

2.3 Das dritte Buch: Das Gravitationsgesetz

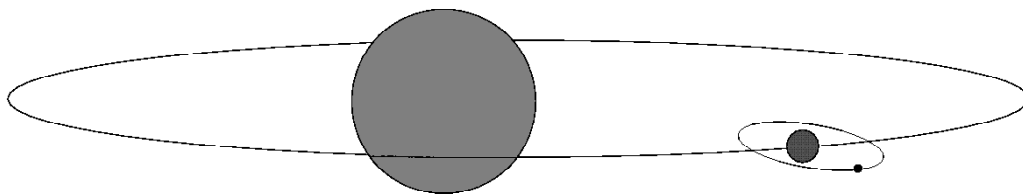
Im dritten Buch über das "Weltsystem" (Planetensystem) geht Newton ausführlich auf die Gravitationskraft ein (Diese ist die Zentripetalkraft der beiden ersten Büchern). Nach einigen Tatsachen über die Verhältnisse der Planeten, unter anderem der 3 Keplerschen Gesetze, wobei er nur beim dritten Kepler erwähnt, beweist er - unter Verwendung früherer Resultate - das $1/r^2$ -Verhalten der Gravitationskraft. Außerdem zeigt er die Proportionalität der Kraft zu den beteiligten Massen (Buch III, Proposition VII). Damit hat die Gravitationskraft F zwischen zwei Körpern mit Masse m_1 und m_2 im Abstand r die quantitative Form¹²

$$F(r) = \frac{Gm_1m_2}{r^2}. \quad (5)$$

Die Proportionalitätskonstante G , die *Gravitationskonstante*, wurde erstmals hundert Jahre danach 1798 indirekt von H. Cavendish ermittelt; ab 1885 führte R. Eötvös Präzisionsmessungen von G durch. Der aktuelle Wert beträgt in SI-Einheiten

$$G = 6.6742 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2.$$

Newton stellt dabei bewußt nur die mathematische Form der Kraft fest, ohne auf die Art und Weise der (instantanen) Vermittlung einzugehen. Diese instantane Wirkung über beliebige Entfernungen entsprach nicht seiner Vorstellung, sie war aber das Resultat seiner Analyse der Bahnen.



2.4 Mond, Erde – und Sonne

Ein wesentlicher, wenn auch natürlicher Schritt in der Entwicklung der Theorie der Bewegung von Körpern war Newtons Beschäftigung mit dem System Erde - Mond unter dem Einfluß der Anziehungskraft der Sonne (Buch III, Prop. XXII). Newton führte gewisse "Ungleichheiten" der Mondbewegung auf den Einfluß der Sonne zurück. Unter anderem erwähnt er, daß sich der Mond im Perihel und im Aphel der Erde unterschiedlich schnell bewegt (Buch III, Prop. XXXV, Scholium; dies hat er bereits in Buch I auf die Wirkung

¹²Mit der Bedeutung der Konstanten G hat sich erstmals K. F. Gauß 1809 in seiner "Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis ambientum" ausführlich beschäftigt [Siegmond].

der Sonne zurückgeführt). Die Sonne hat den größten störenden Einfluß auf das System Erde-Mond: Ihr gravitativer Einfluß auf den Mond ist doppelt so groß wie jener der Erde. Newton konnte durch die Berücksichtigung der Sonne die "Anomalien" (Störungen) der Mondbewegung und die Gezeiten erklären.

Konsequent auf mehr als zwei Körper angewendet führen die Bewegungsgesetze aber auch auf neue Phänomene in der Bewegung. Dazu ist es aber notwendig eine andere als Newtons geometrische Methode zu verwenden. Der überaus fruchtbaren analytischen Methode, d.h. die Bewegung als Lösung von Differentialgleichungen zu bestimmen, wenden wir uns nun zu.

3 Auf den Schultern Newtons

Wie schon erwähnt, stellte Euler in seiner sogenannten ersten Mechanik 1736 die Bewegung von Punkten – auf solche beschränkte er sich und meinte, daß es auf der Hand liegt, daß ein (ausgedehnter) Körper aus solchen zusammengesetzt ist und sich dementsprechend verhält – in Form von Differentialgleichungen dar. Er zerlegte dabei aber die Kraftwirkung in eine Komponente in Richtung der Bewegung und eine senkrecht dazu ([Euler], [Lagrange]); die erste Kraftkomponente ändert den Betrag der Geschwindigkeit, die zweite bewirkt hauptsächlich eine Abweichung der Bewegung von der Geradlinigkeit. Erst in der Einleitung zu seiner zweiten Mechanik, der "Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum", wendete Euler 1765 die Methode von MacLaurin¹³, die auftretenden Vektorgößen auf ein festes Koordinatensystem¹⁴ zu projizieren, auf Systeme von Punktmassen an und leitete so die bekannten Bewegungsgleichungen für starre Körper ab.

Erst in unserer Zeit beginnt sich der volle Reichtum an Bewegungsformen, die als Lösungen der Gleichungen für mehrere Körper auftreten, abzuzeichnen. Gründe für diese späten Erkenntnisse sind die damals fehlende mathematischen Werkzeuge und die fehlende Rechnerleistung zur Lösung von Differentialgleichungen. Für zwei Körper sind die Gleichungen exakt lösbar; die Lösungen zeigen reguläres Verhalten. Ab drei Körpern sind die Gleichungen im allgemeinen nicht mehr analytisch lösbar; Hand in Hand damit geht eine neue, chaotische Form der Bewegung. Dies zeigen die numerischen Lösungen der Gleichungen. Obwohl sich schon Newton dem Problem der drei Körper widmete, traten diese Lösungen nicht auf; denn auch die nachfolgenden Berechnungen gingen stets vom lösbaren Fall aus und betrachteten den dritten Körper nur als Störung. Genau das ist aber der Grund für das Nichterkennen von chaotischen Lösungen.

¹³Laut Lagrange scheint der schottische Mathematiker C. MacLaurin (1698-1746) in seinem "A Treatise of Fluxions" 1742 der erste gewesen, der die Gleichungen in der uns heute vertrauten Form anscrieb [Lagrange]. Simonyi schreibt diese Rolle Euler in einer Arbeit des Jahres 1750 zu [Simonyi]. In seiner Euler-Biographie wird von E. Fellmann (rororo-Monographie, Reinbek bei Hamburg 1995) auch Euler als Urheber genannt. Allerdings soll dies das erst 1765 mit seiner sogenannten Zweiten Mechanik (Theorie motus corporum solidorum ..., d.i. der 3. Band der Mechanik in der Übersetzung von Wolfers) erfolgt sein, in der er nach dem Vorbild von C. MacLaurins "Treatise of Fluxions" die Vektoren auf ein festes, rechtwinkeliges Koordinatensystem projiziert. Auch Mach zitiert MacLaurin als Urheber dieser Gleichungen [Mach] (allerdings ist der Titel des Werkes falsch angegeben).

¹⁴Hier erhebt sich natürlich die Frage: Gegenüber welchem Objekt ist das Koordinatensystem fest? Gegenüber Newtons absolutem Raum?

3.1 Die Bewegungsgleichungen für zwei Körper

Betrachten wir zunächst die Bewegung von zwei schweren Körpern und die sich daraus ergebenden Kepler-Gesetze. Die Euler-Newtonschen Bewegungsgleichungen, angewendet auf zwei wechselwirkende Körper, z.B. Sonne und Planet in den Orten \mathbf{r}_S bzw. \mathbf{r}_P , lauten [Iro]

$$\begin{aligned}m_S \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_S &= F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \\m_P \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_P &= -F(r) \frac{\mathbf{r}}{r},\end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_S, \quad r = |\mathbf{r}|,$$

$F(r)$ ist durch (5) gegeben. Jede Gleichung für sich entspricht dem zweiten Newtonschen Gesetz (die Beschleunigung wird durch die Kraft, welche der andere Körper ausübt, bewirkt). Die rechten Seiten der beiden Gleichungen sind eine Konsequenz des dritten Newtonschen Gesetzes (actio = reactio). Das erste Gesetz ergibt sich für $F \equiv 0$: gleichförmige Bewegung im kräftefreien Fall. Die Summe der beiden Gleichungen ergibt eine Gleichung für die Position des gemeinsamen Schwerpunktes $\mathbf{R} = (m_S \mathbf{r}_S + m_P \mathbf{r}_P) / (m_S + m_P)$,

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{R} = 0.$$

Die Bewegung des Schwerpunktes entspricht also dem ersten Newtonschen Gesetz: Sie erfolgt gleichförmig (mit konstanter Geschwindigkeit).

Die mit der jeweils anderen Masse gewichtete Differenz der beiden Gleichungen ergibt **eine** Gleichung für die Radiusvektor \mathbf{r} zwischen Sonne und Planet:

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} = -F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mu = \frac{m_S m_P}{m_S + m_P}, \quad (6)$$

also eine Gleichung für die Bewegung der reduzierten Masse μ . Da die Massen der Planeten viel kleiner sind als jene der Sonne, gilt

$$\mu = \frac{m_P}{1 + m_P/m_S} \simeq m_P.$$

Nur die Gleichung (6) ist etwas komplizierter zu lösen. Betrachten wir die Sonne als ruhend, $\mathbf{r}_S = \text{const} = 0$, dann reduziert sich die Bewegungsgleichung für den Radiusvektor \mathbf{r} auf die Bewegungsgleichung für den Planeten: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_P$.

Bei der Behandlung der Gleichung erkennt man bald, daß die Bewegung in einer festen Ebene abläuft, und daß das zweite Keplersche Gesetz nicht nur für (5) sondern für beliebige Funktionen $F(r)$ (d.h. für beliebige Zentralkräfte) erfüllt ist.

Angewendet auf eine Anzahl N von massiven Körpern (Sternen) erheben die Newtonschen Bewegungsgleichungen den Anspruch deren Bewegung vorhersagen zu können.

3.2 Die Keplerschen Gesetze

Bei der Lösung der Bewegungsgleichung (6) verwendet man die Tatsache, daß die Bewegung in einer Ebene senkrecht auf einen festen¹⁵, zeitunabhängigen Vektor (den Drehimpulsvektor $\mathbf{L} = m_P \mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt$) stattfindet. In dieser Ebene läßt sich die Bewegungsgleichung

¹⁵Wieder tritt hier eine feste Richtung auf!

in eine Komponente entlang des Radiusvektor \mathbf{r} (mit der Koordinate r) und eine dazu senkrechte, tangentielle Komponente (mit der Winkelkoordinate φ) trennen. Der tangentielle Anteil der Bewegung, $r^2 d\varphi/dt$, ist zeitlich konstant (als Konsequenz der Erhaltung des Drehimpulses),

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} =: L/m_P = \text{constant},$$

und ergibt direkt den Flächensatz, das zweite Keplersche Gesetz. Für die Radialbewegung findet man die Gleichung

$$m_P \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{L^2}{m_P r^3} - \frac{G m_S m_P}{r^2}. \quad (7)$$

Die Lösung der beiden Gleichungen ergibt als Bahn $r = r(\varphi)$ eine Kegelschnittlinie, d.h. eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nach Anfangswerten der Positionen und Geschwindigkeiten. Uns interessieren nur die elliptischen Bahnen (erstes Keplersches Gesetz). Nach einem vollständigen Umlauf überstreicht der Radiusvektor genau die Ellipsenfläche. Daraus folgt das dritte Keplersche Gesetz. Alle drei Gesetze sind also Konsequenzen des Newtonschen Bewegungsgesetzes in Form einer Differentialgleichung (6) und der Gravitationskraft (5).

Für die Zeitabhängigkeit der Bewegung entlang der Bahnellipse (große Halbachse a , numerische Exzentrizität e) findet man bei der Integration der Differentialgleichung (7) den Integralausdruck

$$t = t_0 + \sqrt{\frac{1}{2Gm_S}} \int_{r_0}^r \frac{r' dr'}{\sqrt{r' - r'^2/2a - a(1 - e^2)/2}}.$$

Dieser läßt sich entweder direkt numerisch auswerten oder nach Umformungen in die beiden Gleichungen (3) und (4) verwandeln.

3.3 Der Kosmos als Uhrwerk

Die Berechenbarkeit der Bahnen von Planeten hat sicherlich eine Festigung der alten Überzeugung vom streng gesetzmäßigen Ablauf des Weltalls analog einem Uhrwerk bewirkt. Bereits Kepler verwendet diesen Vergleich [Dijksterhuis]. Newton versuchte die unerbittliche Gesetzmäßigkeit mit seinem Bild von einem allmächtigen Schöpfer zu vereinen, indem Gott die Rolle eines Maschinenwärters zuwies, der ab und zu regelnd eingreifen muß. Dies wiederum gab Leibniz die Gelegenheit auf die sich so ergebende Spannung zwischen der Allmacht und der Unvollkommenheit der kosmischen Maschine hinzuweisen [Dijksterhuis]. Das mechanistische Bild des Kosmos wurde durch Laplace auf den Punkt gebracht, der sie sinngemäß folgendermaßen formulierte¹⁶:

Für ein Wesen mit ausreichender Einsicht ist aus den genauen Daten des jetzigen Zustandes des Weltalls die Zukunft berechnen- und vorhersagbar.

¹⁶“Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d’ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l’analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l’univers et ceux du plus léger atome:

Rien ne serait incertain pour elle et l’avenir comme le passé serait présent à ses yeux”

(Essai philosophique sur les probabilités, 1814; deutsch: Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit, Ostwalds Klassiker Band 233, Harri Deutsch, Thun 1998)

Am Ende des 19. Jahrhunderts schien somit die Welt 'gelöst' zu sein.

Einwände gegen diese Überzeugung wurde erstmals um 1900 von H. Poincaré erhoben. Er hatte aber noch nicht die mathematischen Mittel um seinen Zweifel zu untermauern. Einen Hinweis dafür lieferte E. Lorenz erstmals 1963 mit dem Einsatz von Rechenmaschinen zur Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungen (für ein vereinfachtes Wettermodell). Auch bei der Bewegung im Kosmos handelt es sich um nichtlineare Differentialgleichungen.

3.4 Die Anomalien in der Bewegung des Mondes

Die Bahn des Mondes ist zwar eine, fast kreisförmige Ellipse, sie zeigt aber Abweichungen gegenüber dem aus dem Zweikörpersystem Erde-Mond errechneten Verhalten; unter anderem ist die Bahnebene nicht fix und sie wird nicht regelmäßig durchlaufen¹⁷. Der Grund dafür ist: Zusätzlich zur Gravitationskraft der Erde, wirkt auch (zumindest) die Anziehungskraft der Sonne auf den Mond. Die Sonne bewirkt auch eine Verlangsamung oder eine Beschleunigung des Mondes in seiner Bahn (im Vergleich zu Keplers zweitem Gesetz). Auch die Bahn wird durch den Sonneneinfluß etwas abgeändert (im Vergleich zu Keplers festen Ellipsen im ersten Gesetz). Die Größe dieser Änderungen hängt von der relativen Lage von Sonne, Erde und Mond ab.

Eine Konsequenz dieser Wechselwirkungen ist die veränderliche Länge des siderischen und des synodischen Monats¹⁸. Der siderische Monat kann bis zu 7 Stunden variieren. Die Dauer des synodischen Monats ändert sich sogar um 12 Stunden.

Eine weitere Anomalie ist das Wandern der Hauptachse der Bahnellipse. Damit hat sich auch T. Simpson beschäftigt; aber der erste, der sie erklären konnte, war A.C. Clairaut.

Die theoretische Beschäftigung mit den Mondbahnanomalien im 18. und 19. Jahrhundert waren zahlreich. Insbesondere die Arbeiten von Euler, Laplace und Clairaut zu nennen. Clairaut wendete in seiner "Théorie de la lune" (1752) auf die Mondbewegung noch strikt die Newtonsche, geometrische Methode an. Er erklärte so die Bewegung der Mondapsiden, die bislang ein Rätsel für die Astronomen war. Euler wendete sich in den beiden Arbeiten "Theoria Motus Lunaris" (1753) und "Theoria Motuum Lunae" (1772) dem Dreikörperproblem in analytischer Weise zu. Die ersten beiden Bände (1799) von Laplace's fünfbandigen "Mécanique céleste" sind Methoden zur Berechnung der Planetenbahnen gewidmet. In den nächsten beiden Bänden (1802 und 1805) legte er Anwendungen vor. In allen diesen Arbeiten lassen sich die Eigenschaften (Anomalien) der Mondbewegung im Rahmen der Newtonschen Theorie mittels Näherungsverfahren verstehen. Daß aber bei genaueren analytischen sowie bei numerischen Untersuchungen die bereits erwähnten neuen Wesenszüge der Bewegung zutage treten können, zeigt schon

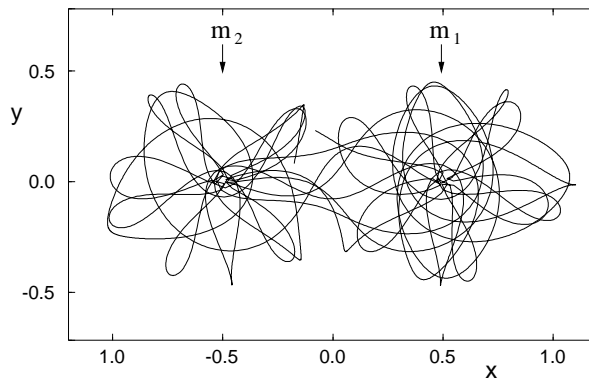
¹⁷Die ersten umfassenden und systematischen Mondbeobachtungen führte Tycho Brahe ab 1581 durch [North].

¹⁸Der siderische Monat ist jene Zeit, welche der Mond benötigt um einen vollen Umlauf um die Erde, bestimmt bezüglich Fixsternen, durchzuführen. Der siderische Monat ist die wahre Umlaufzeit des Mondes, die mittlere Dauer ist nicht ganz $27\frac{1}{3}$ Tage.

Der synodische Monat ist jene Zeit, welche nach einem vollständigen Zyklus der Mondphasen verstrichen ist. Der siderische Monat wird daher bezüglich der Sonne bestimmt und beträgt im Mittel etwas mehr als $29\frac{1}{2}$ Tage.

3.4.1 Das eingeschränkte Dreikörperproblem

Die Bestimmung der allgemeinen Bewegung von drei schweren Körpern (wie z.B. Sonne, Mond und Erde) ist bereits sehr kompliziert. In einem einfacheren Modellsystem bewegen sich die drei Körper sich unter dem Einfluß der wechselseitigen Gravitationsanziehung in einer **festen** Ebene; die Masse eines der Körper sei wesentlich kleiner als jene der anderen. Dann verspürt der leichte Körper den Einfluß der beiden schweren Körper, während man die Wirkung des leichten Körpers auf die Bewegung der schweren vernachlässigen kann. Die beiden schweren Körper bewegen sich daher auf einer Kepler-Ellipse – speziell einer Kreisbahn. Die möglichen Bewegungsformen der kleinen Masse wurden von M. Hénon und C. Heiles untersucht: Es gibt sowohl regulär aussehende Bahnen als auch vollkommen 'erratische' (chaotische) Bahnen¹⁹. Ein Beispiel einer solchen chaotischen Bewegung der leichten Masse um die schweren Massen m_1 und m_2 zeigt die folgende Abbildung. Da sich im chaotischen Bereich der Bewegung die Bahnen von unmittelbar benachbarten Ausgangspositionen und -geschwindigkeiten vollkommen verschieden entwickeln, ist eine Vorhersage, eben wegen dieser äußerst sensitiven Abhängigkeit von der Kenntnis der Anfangswerte, unmöglich (s. [Iro] und meinen Beitrag in [Pichler]). Das Uhrwerkmodell des Weltalls wird obsolet. Es ist also nicht selbstverständlich, daß sich der Mond in fast regelmäßiger Weise um die Erde dreht oder daß sich alle neun Planeten auf Kepler-Bahnen um die Sonne bewegen (die rosettenförmige Merkurbahn kann durch die Relativitätstheorie erklärt werden).



Chaotisches Verhalten steckt in unvermeidbarer Weise in den Bewegungsgleichungen von mehr als zwei Körpern. Es erhebt sich somit die Frage: Warum wird es nicht (bzw. kaum) beobachtet?

3.5 Die Stabilität des Planetensystems

Dynamische Systeme wie das Planetensystem, in denen chaotisches Verhalten vorkommt, sind zwar deterministisch, zeigen aber dennoch eine gewisse Zufälligkeit. Ein Merkmal einer chaotischen Dynamik (Zeitentwicklung) ist die praktische Unvorhersagbarkeit der zukünftigen Positionen und Geschwindigkeiten. Ein Maß für die Unvorhersagbarkeit ist die sogenannte Ljapunov-Zeit τ , nach der zwei – in ihren Anfangswerten – nur geringfügig unterschiedliche Realisierungen des Systems völlig unterschiedliche Werte aufweisen. Diese Unvorhersagbarkeit ist in unserem Planetensystem (anscheinend) nicht vorhanden; die Planeten bewegen sich in vorhersagbarer Weise auf stabilen Ellipsenbahnen.

¹⁹Daß die Bewegung von 2 Körpern nicht chaotisch ist, liegt an der *Integrabilität* des Systems. Eine Merkmal dieser Integrabilität ist die rein algebraische Lösbarkeit der Gleichungen mit Hilfe von sogenannten Erhaltungsgrößen.

In Anbetracht der Nichtlinearität des Gleichungssystems ist das erstaunlich. Numerische Berechnungen von J. Laskar ergaben für Ljapunov-Zeit des Sonnensystems den Wert von $\tau \simeq 10.000.000$ Jahren, d.h. eine Vorhersage in dieser Größenordnung ist sicher fragwürdig. Bemerkenswert ist aber, daß das Sonnensystem sicherlich älter als das hundertfache dieser Zeit ist [Thirring 2004].

Aufgrund der Untersuchungen und Resultate über chaotisches Verhalten (KAM-Theorem, s.u.) kann man auch Strukturen, wie sie der Saturn in seinen Ringen aufweist, verstehen. Damit zusammen hängen auch Erklärungsversuche zur Entstehung unseres Planetensystems. Einen Beitrag dazu liefert die derzeitige Erforschung der Saturnringe durch die amerikanisch-europäische Raumsonde Cassini-Huygens.

4 Das Mysterium des Planetensystems

Die Bahnen der Planeten des Sonnensystems befinden sich **alle** (ziemlich) **in einer Ebene**²⁰. Außerdem kreisen die Planeten alle in derselben Richtung um die Sonne²¹. Die Keplerschen Gesetze können diese Beobachtungen nicht erklären. Die Bahnen scheinen deshalb – je nach Geschmack – ein Zufall oder ein Mysterium zu sein. Keplers Versuch die Bahnverhältnisse durch die platonischen Körper in "Mysterium Cosmographicum" zu erklären mag zwar ansprechend erscheinen, aber er ist nicht unbedingt schlüssig.

Im Rahmen der Newtonschen, mathematischen Beschreibung ist eine Erklärung der erwähnten Eigenschaften der Planetenbewegung auch nicht offensichtlich. Ich glaube aber, daß die Gleichungen, angewendet auf viele potentielle Planeten, diese Umstände als **Selektion von stabilen Bahnen** erklären kann. Die neueren Resultate über chaotische Dynamik, insbesondere das sogenannte KAM-Theorem, lassen auch das Keplersche Bild der Planetenbahnen, welches von Naturwissenschaftlern meist eher belächelt wird, in einem anderen Licht erscheinen. Dies wird von W. Thirring im Vorwort zur 2. Auflage seines Lehrbuches [Thirring 1988] treffend formuliert:

"[Ein neuer] Trend in der Physik ... besteht nicht nur in der Verwendung feinerer mathematischer Hilfsmittel, sondern auch in einer Neubewertung des Wortes "fundamental". Was früher als Schmutzeffekt abgetan wurde, erscheint heute als Folge eines tieferen Prinzips. Ja sogar diese Keplerschen Gesetze, welche die Radien der Planetenbahnen bestimmen und die man als mystischen Unsinn gerne verschwieg, scheinen in Richtung einer Wahrheit zu deuten, die sich oberflächlicher Betrachtung verschließt: Schachtelung vollkommener platonischer Körper führt zu Verhältnissen von Radien, die irrational sind, aber algebraischen Gleichungen niederer Ordnung genügen. Gerade solche Irrationalzahlen lassen sich am schlechtesten durch rationale approximieren, und Bahnen mit diesem Radiusverhältnis sind gegenüber gegenseitigen Störungen am robustesten, da sie am wenigsten unter Resonanzeffekten leiden."

Der letzte Satz ist der Inhalt des KAM-Theorems. Wählt man in einem Mehrkörpersystem zwei Körper aus, so bilden diese zunächst ein analytisch lösbares Zweikörpersystem.

²⁰Nur die Bahnebene Plutos zeigt eine beträchtliche Neigung von 17° zur Ekliptik (Erdbahn). Die Bahn der Venus ist nur um 3.4° geneigt.

²¹Diesen Umstand und daß die Umkreisung im Sinn der Sonnenrotation erfolgt, hat auch Laplace in seinem Essai über die Wahrscheinlichkeit (s. Fußnote 16) merkwürdig gefunden, und er hat auch darüber eine Hypothese entwickelt. Die Wahrscheinlichkeit, daß dies ein Zufall ist, ist äußerst gering, sodaß es eine Ursache geben muß.

Stabile Bahnen der übrigen Körper unter dem Einfluß der beiden ausgewählten Körper kann man dann über das KAM-Theorem als Selektion von stabilen Bahnen verstehen.

Das Ende der Geschichte?

Es ist erstaunlich, daß die Newtonsche Gravitationstheorie so leistungsfähig und erfolgreich ist, hat sie doch einen grundlegenden Mangel: die instantane Fernwirkung; die Bewegung einer Masse wirkt instantan auf jede weitere Masse aus und sei sich auch noch so weit entfernt. Dies ist nicht nur ein Schönheitsfehler der Theorie sondern führt in Systemen mit mehr als 3 Körpern auch auf unphysikalische Lösungen. Die Beseitigung dieses Makels durch A. Einstein mit seiner Allgemeinen Relativitätstheorie im zwanzigsten Jahrhundert ist eine weiteres bedeutendes Kapitel in der Kulturgeschichte der Physik.

Nachwort

Die Beschäftigung mit diesem Teil der Wissenschaftsgeschichte war für mich sehr bereichernd. Das Thema ist natürlich bei weitem nicht abgeschlossen: Je tiefer man in die Originalliteratur eindringt, um so verzweigter und vielfältiger werden die Wurzeln der physikalischen Ideen. Die obige Darstellung ist sicherlich unvollständig und es ist fraglich ob sie in allem korrekt ist.

Der Stadt Peuerbach dem wissenschaftlichen Leiter der Tagung, Herrn Prof. F. Pichler, danke ich für die Einladung zu diesem Symposium und die damit verbundene äußerst anregende Arbeit. Herrn Prof. V. Bialas und Herrn Prof. F. Samhaber habe ich für Hinweise zu danken. Meinem Kollegen Herrn Prof. R. Folk möchte ich für sein Interesse und die sich daraus ergebenden zahlreichen Diskussionen, Hinweise und Anregungen herzlich danken.

Literatur

V. Bialas, Johannes Kepler, C.H. Beck, München 2004

S. Chandrasekhar, Newton's Principia for the Common Reader, Clarendon Press, Oxford 1995

E.J. Dijksterhuis, Die Mechanisierung des Weltbildes, Springer, Berlin 2002

L. Euler, Mechanik, 2 Bde, Übersetzung der sogenannten ersten Mechanik, "Mechanica sive Motus Scientia Analytica exposita" (1736), von J.Ph. Wolfers, C.A. Koch, Greifswald 1848 und 1850

M.C. Gutzwiller, Review of Modern Physics **70**,580(1998)

O. Gingerich, The Eye of Heaven - Ptolemy, Copernicus, Kepler, American Institute of Physics, New York 1993

G. Doebel, Johannes Kepler, Styria, Graz 1983

H. Iro, A Modern Approach to Classical Mechanics, World Scientific, Singapore 2002

M. Jammer, Concepts of Force, Dover, New York 1999

J. Kepler, Mysterium Cosmographicum - The Secret of the Universe, trans. by A.M. Duncan, Abaris Books, Norwalk 1999

J. Kepler, Neue Astronomie, übers. von M. Caspar, Nachdruck der Ausgabe von 1929, Oldenburg Verlag, München 1990

J. Kepler, Weltharmonik, übers. von M. Caspar, Oldenburg Verlag, München-Berlin 1939

- J. Kepler**, Epitome Astronomiae Copernicanae, Band VII der gesammelten Werke, herausgegeben von M. Caspar, 2. Aufl., Beck, München 1991
- J. Kepler**, Epitome of Copernican Astronomy & Harmonies of the World, trans. by C.G. Wallis, Prometheus Books, Amherst New York 1995
- A. Koestler**, Die Nachtwandler, Suhrkamp 1980
- J.L. Lagrange**, Analytische Mechanik, übers. von H. Servus, Springer, Berlin 1887
- M. Lemcke**, Johannes Kepler, rororo-Monographie, Reinbek bei Hamburg 2002
- E. Mach**, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, 7. Auflage, Brockhaus, Leipzig 1912
- I. Newton**, The Principia, trans. by A. Motte, Prometheus Books, New York 1995
- I. Newton**, Mathematische Prinzipien der Naturlehre, übers. von J. Ph. Wolfers, Nachdruck der Ausgabe von 1872, Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt 1963
- J. North**, Viewegs Geschichte der Astronomie und Kosmologie, Vieweg, Braunschweig 1997
- F. Pichler** (Hrsg.), Der Harmoniegedanke gestern und heute, Peuerbach Symposium 2002, Universitätsverlag Trauner, Linz 2003
- S. Sambursky**, Der Weg der Physik, dtv, München 1978
- G. Siegmund**, Handbuch der mathematischen Geographie, J. Engelhorn, Stuttgart 1890
- K. Simonyi**, Kulturgeschichte der Physik, Harri Deutsch, Thun/Frankfurt am Main 1995
- W. Thirring**, Lehrbuch der Mathematischen Physik, Band 1, 2. Aufl., Springer, Wien 1988
- W. Thirring**, Kosmische Impressionen, Molden Verlag, Wien 2004
- S.I. Wawilow**, Isaac Newton, Akademie-Verlag, Berlin 1951