Eulers analytische Mechanik

Harald Iro

Eulers 'Analytisierung' der Newtonschen Mechanik ist wesentlich für den Erfolg dieser Theorie. Euler hat die Physik nicht nur als Mathematiker durch seine konsequente Anwendung der Analysis bereichert, sondern auch neue physikalische Konzepte und Vorstellungen in seiner Theorie der Rotationsbewegung des starren Körpers ausgearbeitet. Auch für die heute selbständigen Disziplinen der Hydrodynamik und der Elastizitätstheorie lieferte Euler grundlegende Beiträge.

Seine Leistungen auf dem Gebiet der Mechanik werden sehr unterschiedlich eingeschätzt. In den Darstellungen der Geschichte der Mechanik von Lagrange[1], Duhem[2] und Mach[3] spielt Euler eine eher unterbewertete Rolle, während Truesdell Eulers physikalische Beiträge z.B. im Vergleich mit Newton oder Lagrange zu hoch einschätzt[4]. Die folgende Darstellung beschränkt sich auf die analytische Behandlung der Dynamik in mechanischen Systemen. Da die Himmelsmechanik, also die Bewegung der Planeten und ihrer Monde, einerseits der Impulsgeber für die Mechanik ist und andererseits ihr Prüfstein, kommt man nicht umhin auch darauf kurz einzugehen, auch wenn dieses Thema eine eigene Abhandlung erfordert.

1 Newtons Mechanik

[1]Vgl. die im Literaturverzeichnis angeführte deutsche Übersetzung der 'Méchanique analitique'.

[2]P. Duhem, L' évolution de la mécanique, J. Vrin, Paris 1992

[3]E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung – historisch kritisch dargestellt, F.A. Brockhaus, Leipzig 1912

[4]Hier ist insbesondere seine Einleitung zu den unten angegebenen Opera omnia angesprochen. Truesdell rühmt Eulers Beiträge zur Mechanik starrer Körper, zur Hydrodynamik und zur Elastizitätstheorie in vielen Veröffentlichungen; in manchen äußert er sich gleichzeitig in vollkommen unakzeptabler Weise negativ über das Konzept der Punktmechanik. Daher ist es interessant, daß er Eulers erste Mechanik anscheinend nie ausführlich kommentiert hat. Eine kurze Stelle über diese Mechanik in seinen 'Essays in the History of Mechanics' enthält übertriebene und falsche Feststellungen.

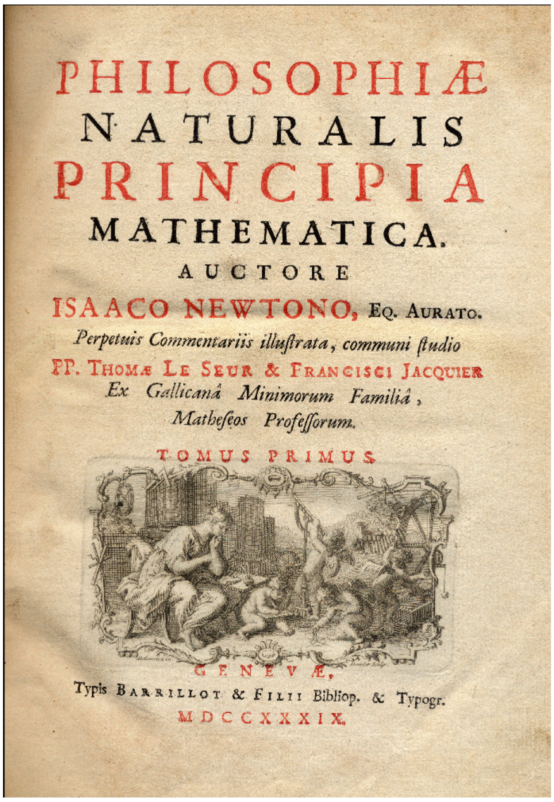


Abbildung 1: Die Titelseite der von LeSeur und Jacquier kommentierten, dritten Auflage von Newtons Principia

1.1 Die Principia

Isaac Newtons (1643-1727) mathematische Naturphilosophie (Philosophiae naturalis principia mathematica, 1687; kurz Principia), als Gegenposition zu René Descartes (1596-1650) spekulativen philosophischen Prinzipien dargelegt in der 'Principia philosophiae', geht von 3 Gesetzen der Bewegung und dem Gravitationsgesetz als Grundlage für die Naturbeschreibung aus. Newton ist damit in der Mechanik, der Mechanik der flüssigen Körper (später Hydrodynamik) und der Astronomie erfolgreich. Der Inhalt der beiden ersten Gesetze ist folgender:

> Ein Körper, auf den keine Kraft wirkt, verharrt in Ruhe oder der geradlinigen Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Wenn eine Kraft auf den Körper wirkt, dann ändert sich sein Impuls proportional zur Stärke und in Richtung der einwirkenden Kraft.

Der Impuls p ist eine Kenngröße für den Bewegungszustand eines Körpers: Er ist das Produkt aus Masse m und Geschwindigkeit v des Körpers: $p = mv$; mangelnde Geschwindigkeit v kann durch Masse m wettgemacht werden und umgekehrt.

Der Begriff geht auf den Stoß von Körpern zurück (Descartes, Huygens[5]). Das dritte Gesetz besagt, daß die gegenseitige Kraftwirkungen zweier Körper gleich groß sind. Diese Gesetze sind die Grundlage für Newtons Mechanik und seine Beschäftigung mit Flüssigkeiten.

Für die Anwendung seiner Gesetze auf die Bewegung der Planeten benötigt Newton die Kraft zwischen zwei Himmelskörpern. Das von ihm bestimmte Gravitationsgesetz besagt nun, daß die Kraft zwischen zwei Körpern proportional zu ihren Massen und indirekt proportional zum Quadrat ihres Abstandes ist. Newton postuliert, daß diese Kraft nicht nur Gestirne sondern jeden Körper mit Masse betrifft; das ist Newtons Universalitätsaxiom der Gravitation. Die Bewegungsgesetze sind keine Schöpfungen Newtons und auch diese Form der Gravitationskraft wurde bereits zu Newtons Zeit vermutet. Es ist aber die Formulierung und die Auswahl, die den Erfolg brachte. Besonders über die Gravitationskraft gab es Diskussionen: Wie pflanzt sie sich fort? Braucht sie dazu ein Medium? Damit verbunden ist das zweite Problem: die den bisherigen Erfahrungen im irdischen 'Labor' widersprechende unmittelbare, unverzögerte Wirkung dieser neuen Kraft auch über astronomische Distanzen hinweg. Insbesondere für die Cartesianer war die mathematische Form keine Erklärung, sie bevorzugten Descartes spekulative Wirbeltheorie seines mit Materie erfüllten Raumes. So hatten u.a. G. W. Leibniz (1646-1716) und Huygens Erklärungen für die Gravitationswirkung; später sollte auch Euler eine solche veröffentlichen (De causa gravitationis, s. unten).

Da Newton die Gesetze verbal als Proportionen zwischen graphisch darstellbaren Größen formuliert hat, erfordert die Auswertung dieser Proportionen den Bezug auf Abbildungen: In geometrischen Figuren werden die relevanten Größen als Strecken dargestellt und aus der Abbildung die Proportionen aufgestellt. Die gekonnte Verwendung der Proportionen ist die sogenannte synthetische, geometrische Methode Newtons. Sie ist eher umständlich und für Algorithmen nicht geeignet.

Die Principia bestehen aus drei Büchern. Das erste Buch beschäftigt sich mit dem Zusammenhang zwischen der auf einen Körper wirkenden Kraft und seiner Bahn. Newton untersucht verschiedene Bahnformen und die entsprechenden Kräfte. Dieses Buch ist die Wurzel der analytischen Mechanik. Das zweite Buch beschäftigt sich mit dem Verhalten von Körpern in einem umgebenden, widerstehenden Medium (Gas, Flüssigkeit) und mit dem Medium selbst. Newton behandelt u.a. den Widerstand des umgebenden Mediums auf die Bewegung eines Körpers, die Schallausbreitung in Luft, sowie die Kreisbewegung von Flüssigkeiten als Antwort auf die Descartessche Wirbeltheorie. Dieses Buch ist der Beginn der Hydrodynamik. Das dritte Buch ist dem von Newton so benannten System der Welt, also dem Planetensystem (inklusive der jeweiligen Monde) gewidmet; es begründet die Himmelsmechanik. An das zweite Buch anschließend beschäftigt sich Newton im dritten Buch auch mit der Gestalt der Erde und mit der Er-

[5] Ch. Huygens (1629-1695), holländischer Mathematiker und Physiker.

klärung der Gezeiten. Wir gehen nur auf die Thematik des ersten und des dritten Buches ein.

Ein zentrales Problem der Principia ist der Zusammenhang zwischen Bahnform und Kraft. Allgemein bekannt sind wohl die Ellipsenbahnen der Planeten um die Sonne sowie die Parabelbahnen von Geschossen und die Gesetze des freien Falls von Körpern auf der Erde[6]. Aus dem 1. Keplerschen Gesetz – die Planetenbahnen sind Ellipsen, die Sonne als Kraftzentrum befindet sich in einem Brennpunkt der Ellipse – berechnet Newton die Gravitationskraft (sogenanntes direktes Problem): Sie ist invers proportional zum Abstandsquadrat. Er zeigt auch, daß für Parabel- und Hyperbelbahnen ebenfalls ein solches Kraftgesetz folgt. Diese drei Typen von Kurven werden als Kegelschnittlinien bezeichnet. Eine eindeutige Antwort auf die umgekehrte Fragestellung, das sogenannte inverse Problem: Sind die Bahnen der Gravitationskraft stets Kegelschnittlinien, oder gibt es weitere Bahnformen? gibt er nicht. Eindeutige Antworten darauf wurden in den Mitteilungen von J. Keill (1708) mittels der Fluxionenrechnung und von Joh. Bernoulli, J. Hermann sowie P. Varignon mit Hilfe der Analysis, alle drei im Jahre 1710, erbracht: Es gibt nur Kegelschnittlinien als Lösung.

1.2 Newtons Himmelsmechanik

Die Gravitationskraft wurde aus der vereinfachenden Idealsituation von nur zwei Körpern erschlossen. Es gibt aber deren unendlich viele, die mit ihren Massen Kräfte verursachen und auf Kraft reagieren, sodaß eigentlich die gleichzeitige Wechselwirkung vieler Körper, ein sogenanntes Mehrkörperproblem, vorliegt. Da aber die Sonnenmasse ca. 300.000mal so groß ist wie die Gesamtmasse der Planeten, waren Keplers Gesetze und dann Newtons Gravitationsgesetz sehr gut erfüllt. Bei genaueren Beobachtungen stellte man aber fest, daß die Bahnen der Planeten und ihrer Monde nicht fest gegenüber dem Fixsternhimmel sind: es gibt sogenannte Ungleichungen. Um diese zu genau zu bestimmen, müßte man den gravitativen Einfluß aller Planeten und deren Bewegung gleichzeitig berechnen. Wenn diese Rechnungen mit der Beobachtung übereinstimmen, dann könnte man eigentlich erst sagen, daß das Gravitationsgesetz Newtons gültig ist. In der Praxis kann man sich nur mit Näherungen behelfen. So untersuchte schon Newton das Dreikörpersystem Sonne-Erde-Mond. Außerdem iniziierte er durch seine Theorie der Gezeiten (nach den falschen Theorien Galileis und Descartes) und der Gestalt der Erde (als resultierend aus der Rotationsbewegung der Erde und dem Umstand, daß die Erde kein starrer Körper ist[7]) viele Beiträge zu diesen Themen; darunter sind auch Beiträge von Euler (z.B. zur Gestalt der Erde: E529 in Opera omnia II, 30 und E619 in Opera omnia II, 31). Newtons Mondtheorie (Principia, Buch III, Proposition XXII ff.) baut auf die Proposition LXVI, Buch I, auf, in

[6]Hier hat Galilei durch seine Gesetze vom freien Fall die Grundlagen geschaffen.

[7]Die Frage war: Ist die Erde entlang der Rotationsachse abgeplattet oder elongiert?

der die Bewegung von drei Körpern behandelt wird, deren Kräfte proportional zum Inversen des Abstandsquadrates sind.

Von der dritten Auflage der Principia erschien 1739-42 eine von T. LeSeur und F. Jaquier kommentierte Ausgabe, die nicht nur wegen der Kommentare, die teilweise schon die neue Mathematik verwenden, interessant ist, sondern auch wegen der Verweise auf Arbeiten zur Mechanik. Im dritten Band ist Eulers Arbeit über die Gezeiten abgedruckt, und im zweiten Band, der dem zweitem Buch der Principia entspricht, wird mehrfach auf Eulers erste Mechanik hingewiesen.

2 Die neue Methode: die Analysis

Ungefähr gleichzeitig zur Principia entwickelten Newton und Leibniz ihre Theorien der unendlich kleinen Änderungen von Größen, die Fluxionentheorie ($\dot{x}$) bzw. den Differentialkalkül (dx). Die Vorstellungen von Newton und Leibniz sind zwar unterschiedlich, die beiden Methoden sind aber äquivalent. Letzten Endes hat sich die Leibnizsche Version durchgesetzt, wohl weil sie abstrakter ist, leichter in Algorithmen verwendet werden kann und sie besser zum neuen Funktionsbegriff, der von Euler erarbeitet wurde, paßt. Heute nennen wir dieses Gebiet der Mathematik Analysis.

2.1 Pierre Varignon (1654-1722)

Abbildung 2: Pierre Varignon (1654-1722)

In den Darstellungen der Geschichte der analytischen Mechanik kommt der Name Varignon nicht vor. Bekannt war hingegen sein Buch über die Statik der Kräfte, 'Projet d'une nouvelle mechanic', Paris 1687. Auch in unserer Zeit werden seine Beiträge zur analytischen Mechanik noch eher gering geschätzt (Costabel, Fleckenstein[8]). Zu Unrecht, denn Varignon war der erste, der mit seinen "Regeln" allgemeine Bewegungsgleichungen in analytischer Form angegeben und auf eine Reihe von speziellen Problemstellungen angewendet hat, u.a. auf das inverse Problem.

Schon im Jahr 1700 hat Pierre Varignon als Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften mit Erfolg die neue Mathematik auf die Newtonschen Gesetze angewendet. Gelernt hat er die Theorie der unendlich kleinen Größen von Johann Bernoulli indem er an dessen Unterweisungen für Guillaume François Antoine l'Hospital (1661-1704) teilnehmen konnte. Für die Bewegung entlang eines Körpers einer geraden Linie stellte Varignon in seiner Mitteilung an die Pariser Akademie 'Manière générale de déterminer les forces, les vîtesses, les espaces, & les tems, une seule de ces quatre choses étant donnée dans toutes sortes de mouvemens rectilignes variés à discrétion', Mémoires de l'Academie royale des Sciences, Paris 1700, pp. 22-27, zwei "allgemeine Regeln" für die Änderung der Geschwindigkeit v durch die Kraft y auf:

1. Regel:
$$v = \frac{dx}{dt}$$
in Leibnizscher Schreibweise und $v = \dot{x}$ bei Newton[9]. x ist Position des Körpers auf der Geraden zur Zeit t. Die momentane Geschwindigkeit v ist das Differential dx, d.i. der unendlich kleine Ortsunterschied (während der infinitesimalen Zeitspanne dt), dividiert durch die Zeitspanne, das Differential dt.

2. Regel:
$$y = \frac{dv}{dt}.$$
Diese ist die erste allgemeine Bewegungsgleichung in Form einer Differentialgleichung. In der Form $dv = ydt$ erkennt man das 2. Newtonsche Gesetz wieder: Die Änderung dv der Geschwindigkeit ist gegeben durch die Kraftwirkung y während der infinitesimalen Zeitspanne dt. (vgl. Anhang).

[8]P. Costabel, Pierre Varignon et la diffusion en france du calcul différentiell et intégral, Université de Paris 1965

J.O. Fleckenstein, Pierre Varignon und die mathematischen Wissenschaften im Zeitalter des Cartesianismus, Archives Internationales d'Histoire des Sciences, **5**,76(1948)

[9]Diese Regel tritt bereits bei Leibniz als "allgemeines Prinzip" auf. Für Varignon ist sie ein wesentlicher Punkt in seiner analytischen Darstellung; heute ist sie selbstverständlich.

Für die Anhänger der Fluxionenrechnung ist die Identifikation $v = \dot{x}$ leichter, weil für sie die Bewegung eine Punktes x eine Linie, den Fluenten, erzeugt und $\dot{x}$ die Wachstumsgeschwindigkeit ist, mit der die Linie erzeugt wird.

Die heute verwendete Form dieser Regel:

$$F = m\frac{dv}{dt}.$$

Die Masse m tritt bei Varignon nicht auf; sie ist in seiner Kraft y enthalten: $y = F/m$.

Mit der zweiten Regel leitet Varignon aus dem Galileigesetz, welches besagt, daß das Quadrat der erreichten Geschwindigkeit proportional zur Fallhöhe ist, das Kraftgesetz für die Schwerkraft auf der Erdoberfläche her[10].

Noch im selben Jahr erweiterte Varignon seine Regeln in zwei Abhandlungen auf die krummlinige Bewegung eines Körpers unter dem Einfluß einer Zentralkraft[11]:

1. Regel:
$$v = \frac{ds}{dt}$$

2. Regel:
$$y = -\frac{ds}{dr}\frac{dv}{dt};$$
hier ist s die Weglänge entlang der Bahn und r der Abstand des Körpers vom Kraftzentrum (der Faktor ds/dr kommt von der Projektion der Kraft auf die Bahn $s\,(r)$).

Diese Regeln verwendet er zur Bestimmung der Kraft aus der Bahn für mehrere Bahnformen, u.a. für Ellipsen mit dem Kraftzentrum im Fokus (Planetenbahnen $\rightarrow$ Gravitationsgesetz) bzw. im Mittelpunkt (räumliches Pendel $\rightarrow$ Hookesches Gesetz).

2.2 Jakob Hermann (1678-1733)

Wie Euler und die Bernoullis stammt Jakob Hermann auch aus der Basler Schule. Er veröffentlichte 1716 seine 'Phoronomia' (s. Literaturverzeichnis), deren Inhalt an die beiden ersten Bücher von Newtons Principia anschließt. Dabei verwendet Hermann teilweise die neue Mathematik, aber zur Herleitung von Beziehungen benützt er noch immer weitgehend Newtons geometrische Methode. Eulers Beurteilung des Werkes wird unten zitiert.

Nach allgemeinen Betrachtungen über Kräfte und die Bewegung im Vakuum gibt Hermann im ersten Buch die grundlegende Bewegungsgleichung für die geradlinige Bewegung ohne Hinweis auf Varignon an (sonst verweist er häufig auf

[10] Eine andere Form dieses Gesetzes ist: Der Zuwachs an Geschwindigkeit ist proportional zur verstrichenen Zeit.

[11] Eine Zentralkraft hat ein Kraftzentrum. Die Stärke der Kraft hängt nur vom Abstand vom Zentrum ab. Sie wirkt nur in radialer Richtung bezüglich des Zentrums. Die Gravitationskraft ist eine Zentralkraft, z.B. beim Planetensystem mit der Sonne als Kraftzentrum.

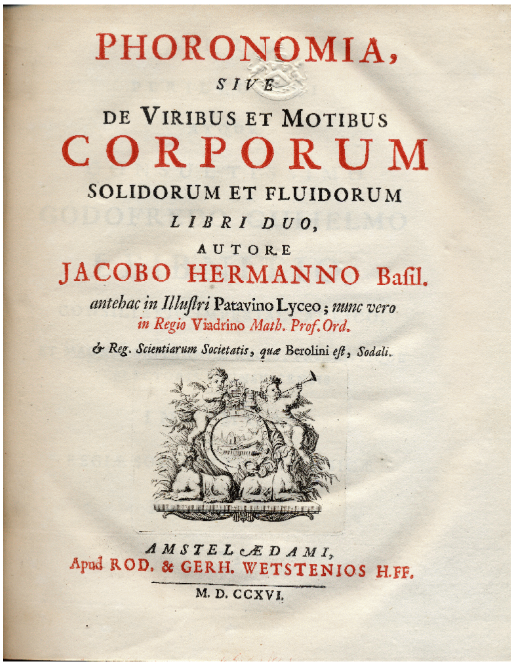

PHORONOMIA,
SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS
CORPORUM
SOLIDORUM ET FLUIDORUM
LIBRI DUO,
AUTORE
JACOBO HERMANNO Basil.
antehac in Illustri Patavino Lyceo; nunc vero
in Regio Viadrino Math. Prof. Ord.
& Reg. Scientiarum Societatis, quæ Berolini est, Sodali.
AMSTELÆDAMI,
Apud ROD. & GERH. WETSTENIOS H.FF.
M. D. CCXVI.

Abbildung 3: Die Titelseite von J. Hermanns Phoronomia

Varignon): Ein Körper mit Masse m und Geschwindigkeit $u = dx/dt$ bewegt sich unter dem Einfluß einer Kraft g gemäß[12]

$$dt = mdu : g.$$

Später leitet er für die krummlinige Bewegung unter dem Einfluß einer Zentralkraft für elliptische und hyperbolische Bahnen das $1/r^2$- Gesetz der Gravitationskraft her (direktes Problem). Danach löst er das inverse Problem und findet die Kegelschnitte als Lösungsbahnen.

3 Eulers Mechanik

Von den vielen Beiträgen zur Mechanik von Körpern werden nur die beiden Hauptwerke, die sogenannte erste Mechanik 'Mechanica ... analytice exposita', 1735 (E15-16 in Opera omnia II, 1-2) und die zweite Mechanik 'Theoria motus corporum solidorum ...', 1765 (E289 in Opera omnia II, 3-4) vorgestellt. Die vielen kürzeren Abhandlungen sind in den Opera omnia II, 5-9 zu finden.

Für Eulers mathematische Fähigkeiten, speziell auf dem Gebiet der Analysis, bietet die Newtonsche Mechanik ein breites Feld der Anwendung. Dies trifft vor

[12] Diese Originalform der Schreibweise widerspiegelt den bei Hermann noch stark vorhandenen Einfluß von Newtons Rechenmethode. Varignon war schon emanzipierter.

allem auf die erste Mechanik, die Mechanik von Punktteilchen, zu. In der zweiten Mechanik, der Theorie der starren Körper, treten zur analytischen Behandlung wesentliche, neue physikalische Beiträge hinzu. In der Himmelsmechanik erweist er sich als einfallsreich bei Näherungsrechnungen zur Lösung des Dreikörperproblems.

In seiner ersten Mechanik steht eindeutig die neue Mathematik im Vordergrund, auch bei der Argumentation wie er selbst feststellt; die physikalischen Grundlagen sind jene Newtons. Weiters ist zu bemerken, daß es eine – nicht nur bei Euler vorhandene – Unklarheit der physikalischen Begriffe (Kraft der Trägheit, Unterschied zwischen Druck und Kraft) gibt. Die physikalischen Begriffe sind erst im Entstehen; obwohl er wiederholt den Energiesatz aufschreibt, erkennt er dessen Bedeutung nicht, sondern sieht ihn nur als Variante der Bewegungsgleichung an. Die Erhaltung der Energie, insbesondere der kinetischen, die zu Eulers Zeiten noch als vis viva bezeichnet wird, ist bei ihm kein Thema. Auch sein mathematisches Werkzeug manchmal noch unpräzise (z.B. schreibt Euler dz wo ddz stehen sollte; vgl. Anhang).

Eine wichtige Voraussetzung für die Entstehung der beiden Mechanikbücher ist Eulers Erkenntnis[13]:

> "... jene Gesetze der Bewegung, welche ein sich selbst überlassener Körper, in Bezug auf die Fortsetzung der Ruhe oder Bewegung beobachtet, gelten eigentlich für unendlich kleine Körper, welche als Punkte angesehen werden können."

Danach richtet sich Eulers Programm:

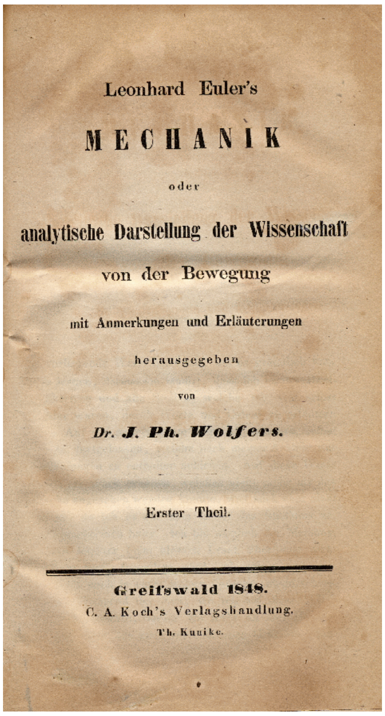
> "Zuerst betrachten wir unendlich kleine Körper, welche man als Punkte ansehen kann. Hierauf gehen wir zu Körpern von endlicher Größe über, welche fest sind und ihre Gestalt nicht verändern können. Drittens behandeln wir biegsame Körper. Viertens diejenigen, welche eine Ausdehnung und Zusammenziehung zulassen. Fünftens untersuchen wir die Bewegung mehrerer loser Körper, von denen einige verhindern, daß die anderen ihren Versuch sich zu bewegen ausführen. Sechstens müssen wir die Bewegung flüssiger Körper behandeln."

Nur den ersten und zweiten Punkt seines Programmes hat Euler in Buchform behandelt, zu einem Teil auch den fünften in der Himmelsmechanik und den beiden Abhandlungen über die Mondbewegung. Zu den anderen Punkten gibt es zahlreiche kürzere Arbeiten.

---

[13]Alle Zitate aus den beiden Mechaniken Eulers entstammen der Übersetzung der beiden Mechanikbücher von Wolfers (vgl. Literaturverzeichnis). Auch die Verweise auf bestimmte Paragraphen beziehen sich auf diese Übersetzung.

3.1 Eulers erste Mechanik



Leonhard Euler's

MECHANIK

oder

analytische Darstellung der Wissenschaft

von der Bewegung

mit Anmerkungen und Erläuterungen

herausgegeben

von

Dr. J. Ph. Wolfers.

Erster Theil.

Greifswald 1848.

C. A. Koch's Verlagshandlung.

Th. Kunike.

Abbildung 4: Die Titelseite der von Wolfers übersetzten und mit Anmerkungen versehenen ersten Mechanik

Eulers erste Mechanik[14] ist eine analytische Behandlung der Bewegung *eines* Körpers, der als Punkt gedacht wird[15]. Euler wendet die Analysis in einem Reichtum an Beispielen an und löst viele Differentialgleichungen und Integrale; viele davon vermutlich als Erster. Er arbeitet das Newtonsche Programm für die Bewegung eines Körpers in umfassender Weise analytisch aus. Er habe das Ganze so verfaßt, "dass jeder, welcher in der Analysis des Endlichen und Unendlichen hinreichende Uebung erlangt hat, alles mit bewunderungswürdiger Leichtigkeit verstehen und das ganze Werk ohne alle Hülfe durchlesen könne."

Bis auf die Einteilung in Kapitel sind beide Teile kaum thematisch strukturiert. Innerhalb der Kapitel sind die Lehrsätze und Beweise, die Aufgaben und

[14]Mechanica sive motus scientia analytice exposita, 2 Bände; deutsche Übersetzung: Leonhard Eulers Mechanik oder analytische Darstellung der Wissenschaft von der Bewegung mit Anmerkungen und Erläuterungen herausgegeben von Dr. J. Ph. Wolfers, Erster Teil, Greifswald 1848 (E15A); Zweiter Teil, Greifswald 1850 (E16A).

[15]Der Grund dafür: Ein ausgedehnter Körper kann auch Drehbewegungen durchführen; diese sollen erst in er zweiten Mechanik untersucht werden.

In späterer Sprechweise: Man betrachtet nur die Bewegungen eines repräsentativen Punktes des Körpers, z.B. des Schwerpunktes.

die Lösungen sowie die Zusätze einfach aneinandergereiht; dadurch wird das Lesen und das Verständnis erschwert. Sie erinnern ein wenig an Schullehrbücher der Mathematik mit ihren fortlaufend numerierten Aufgabenstellungen. Von den vielen Aufgaben, die den Umfang des Werkes ausmachen, sind nicht wenige eher akademischer Natur – sie machen den Eindruck, daß sie nur wegen des Rechnens gestellt wurden – und andere wieder sind nur mathematisch interessante Spezialfälle von allgemeineren Fragestellungen. Dies bestätigt Eulers Inhaltsangabe des vierten Kapitels des ersten Teiles: "Obgleich man in der Natur ausser dem, dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen, Widerstande keinen anderen wahrnimmt, habe ich doch auch andere beliebige Kräfte des Widerstandes behandelt; theils um desto mehr Aufgaben in Betreff der Bewegung im widerstehenden Mittel aufzulösen, theils und hauptsächlich um Gelegenheit zu erhalten, mehrere vorzügliche Rechnungsbeispiele anzuführen." Dieses Übergewicht der Mathematik ist wohl eine Folge von Eulers Freude über die Leistungsfähigkeit der neuen Analysis.

3.1.1 Erster Teil: Die uneingeschränkte Bewegung eines Punktes

In der Vorrede bezieht sich Euler nebst Newton auf Varignon und Hermann als Vorgänger. Dabei scheint er Varignons Beiträge für die Pariser Akademie, insbesondere jene von 1700, nicht zu kennen. Er erwähnt nur Varignons Buch über die Statik, dem Gleichgewicht von Kräften. Merkwürdig ist nur, daß er später Bernoullis Lösung des umgekehrten Problems erwähnt, die auch in den Berichten der Pariser Akademie erschienen ist. In den Mémoires de l'Académie royale des Sciences hätte er auch auf einen der vielen Beiträge Varignons stoßen müssen. Aber vermutlich hatte Euler Kenntnis von Bernoullis Mitteilung von Bernoulli selbst.

Hermanns Phoronomia schätzt Euler als Werk, "in welchem die Lehre von der Bewegung für sich allein, und mit so vielen und grossen Erfindungen bereichert, abgehandelt" ist. Allerdings wird die eigentliche Mechanik zugunsten der Hydrostatik und Hydraulik "zu kurz und zu abgeschnitten" behandelt. "Außerdem aber hat er ... alles nach Art der Alten mittelst synthetisch geometrischer Beweise behandelt und die Analysis, durch welche man zu einer vollständigen Erkenntnis dieser Dinge gelangt, nicht angewandt. Auf ähnliche Weise sind auch Newtons mathematische Principien der Naturlehre, durch welche die Wissenschaft der Bewegung den größten Zuwachs erhalten, abgefasst." Mittels dieser Methode erhält allerdings der "Leser ... keine hinreichend klare und bestimmte Kenntnis". Euler illustriert dann die Problematik der Newtonschen (und Hermannschen) Vorgangsweise in trefflicher Weise aus eigener Erfahrung:

> "Werden dieselben Fragen nur ein wenig abgeändert, so wird er [der Leser] sie mit eigenen Kräften kaum beantworten können; wenn er nicht zur Analysis seine Zuflucht nimmt, und dieselben Sätze nach

der analytischen Methode entwickelt. Diess war gerade bei mir der Fall, als ich anfing, Newton's Principien und Hermann's Phoronomie zu studiren, wo ich zwar die Auflösung vieler Arbeiten genügend verstanden zu haben glaubte, allein solche Aufgaben, welche nur ein wenig verschieden waren, nicht auflösen konnte."

Ganz verschwunden sind die Proportionen Newtons auch in Eulers Darstellung noch nicht.

Der Körper als Punkt Das Konzept eines mathematischen Punktes mit der Eigenschaft Trägheit (d.i. letzten Endes: Masse) zu besitzen tritt erstmals bei Euler auf. Zwar unterscheidet schon Newton zwischen Teilchen und Körpern, aber über die Bedeutung dieser Unterscheidung läßt er den Leser im Unklaren. Aus der Vorrede von Eulers 'Mechanica':

> "... die Bewegung der Körper von endlicher Grösse [kann] nicht erklärt werden, wenn man nicht zuvor die Bewegung von Punkten, aus denen man sich die Körper zusammengesetzt denken muss, ... Diese Abhandlung über die Bewegung von Punkten ist daher die Grundlage und der Hauptheil der ganzen Mechanik, ..."

Über dieses Konzept spöttelt Lichtenberg[16]:

> "In einem Buch von der Tanz-Kunst könnte erstlich die Kreatur als ein Punkt betrachtet werden, die noch keinen Hintern, noch keine rechte und linke Hand hat, so wie Herr Euler die Mechanik abhandelt." (Lichtenberg, Heft B 28)

In der zweiten Mechanik verwendet Euler statt der Punkte (infinitesimale) Elemente des betrachteten Körpers; sein Konzept ist nicht ganz jenes der heutigen Punktmechanik. Zur Grundlage eines philosophisch-naturwissenschaftlichen Systems wurde der mit der Eigenschaft der Trägheit (Masse) versehene Punkt als grundlegende Entität der Materie erst von Boscovich[17] gemacht. In der einleitenden Zusammenschau seiner 'Theoria philosophiae naturalis', Wien 1758, schreibt Boscovich über sein System, welches er dem Newtonschen und Leibnizschen gegenüberstellt, daß die Materie unveränderlich ist und aus Punkten, die einfach, unteilbar, ohne Ausdehnung und getrennt voneinander sind, besteht. Die Punkte sind in einem enormen Vakuum verstreut. Jeder dieser Punkte hat die Eigenschaft der Trägheit: Zwischen den Punkten gibt es eine wechselseitige, aktive Kraft, deren Richtung und Stärke vom Abstand abhängt. Für Euler sind die Punkte eher mathematische Objekte, nicht realitätskonstituierende Dinge.

---

[16] G. Ch. Lichtenberg (1742-1799), Physiker in Göttingen.

[17] R. Boscovich (1711-1787), geb. in Ragusa (Dalmatien), Jesuit

Der Hauptteil Zunächst, im ersten Kapitel "Von der Bewegung im Allgemeinen", gibt Euler eine Einführung in die Begriffe, welche den Bewegungszustand eines Punktes kennzeichnen. Er führt den (absoluten) Raum ein und definiert absolute und relative Bewegung. Bei ihm kann sich auch der Raum bewegen (!), während Newtons Ansicht hier differenzierter ist. Für Euler existiert die Zeit einfach; sie erfordert keine nähere Erläuterung. Die Grundlagen der Bewegung sind vielfach wiederholend und breit dargelegt (die einleitende Zusammenfassung der Punktmechanik in der zweiten Mechanik ist wesentlich systematischer). Zunächst führt Euler die Änderung des Bewegungszustandes nur auf eine "äussere Ursache (causa externa)" zurück und zitiert erst im § 68 das zweite Newtonsche Gesetz. Dabei tritt das erste Mal der Begriff der Kraft[18] als Ursache der Änderung des Bewegungszustandes auf. Die danach folgende Definition der Kraft der Trägheit (vis inertiae):

> "Die Kraft der Trägheit ist jene allen Körpern innewohnende Fähigkeit, entweder in Ruhe zu verharren, oder ihre Bewegung gleichförmig in gerader Linie fortzusetzen."

ist in dieser Form ungenügend (und ohne Konsequenz). Das Wort Kraft hat hier eine andere Bedeutung als z.B. im zweiten Newtonschen Gesetz; das spürt auch Euler und stellt später fest[19]: "Die Kraft der Trägheit ist mit keiner andern Kraft gleichartig". Diese Begriffsungenauigkeit betrifft nicht nur Euler; sie hält noch lange an[20]. Die Kraft der Trägheit tritt zwar schon in der Erläuterung zur 3. Definition, Buch I, der Principia auf, nur ist Newton präziser: Er fügt hinzu, daß ein Körper diese Kraft nur bei der Änderung seines Zustandes ausübt. Bei einer späteren Erwähnung der Kraft der Trägheit fügt Euler auch diesen Zusatz hinzu.

Im Kapitel II, "Von der Wirkung der Kräfte auf einen freien Punkt", geht Euler auf den Begriff der Kraft und der Masse ein. Zu Beginn steht gleich eine merkwürdige Definition der Kraft[21]: "Eine Kraft ist die Gewalt [!], welche einen Körper von der Ruhe zur Bewegung bringt," oder die Bewegung verändert. Daran

[18]Hier verwendet Euler in der 'Mechanica...' nach Newton den Ausdruck 'vis'. Es ist vielleicht bemerkenswert, daß Euler in seiner ersten Mechanik mit Ausnahme der Kraft der Trägheit stets den Ausdruck 'potentia' (oder 'causa externa') und in seiner zweiten Mechanik 'vis' als Bezeichnung einer Kraft wählt. Hermann verwendet in der 'Phoronomia' den Ausdruck 'solicitatio' für den Begriff Kraft.

[19]In seiner zweiten Mechanik nimmt Euler Abstand vom Begriff Kraft. Er korrigiert sich: " Ihre Weise weicht sicher im höchsten Grade von derjenigen ab, nach welcher, wie wir künftig zeigen werden, Kräfte wirken. Damit nun hieraus keine Verwirrung hervorgehe, werden wir das Wort Kraft fortlassen und diese Eigenschaft der Körper einfach Trägheit nennen." In der 'Anleitung zur Naturlehre' führt Euler dafür den Begriff "Standhaftigkeit" ein, der sich aber nicht durchgesetzt hat.

[20]Heute unterscheidet man zwischen Impuls und kinetischer Energie. Die Kraft der Trägheit wird durch den Satz von der Erhaltung des Impulses ersetzt.

[21]Die Definition 10 der Kraft lautet im Original: "potentia est vis...". Was Euler wohl damit gemeint hat?

schließt Euler in eigener Formulierung die Inhalte des ersten und zweiten Newtonschen Gesetzes. Auch die Richtung einer Kraft, die wichtig bei der Zusammensetzung von Kräften ist, führt er ein und verweist dabei auf die Behandlung von Kräften in der Statik. Wichtig ist für Eulers Ableitung der Bewegungsgleichung der Galileische Satz[22], daß die "Incremente der Geschwindigkeiten den Zeiten, in welchen sie erzeugt werden, proportional sind." Er zeigt auch, daß die irrige Ansicht, nach der die Geschwindigkeitszuwächse proportional zum durchlaufenen Weg proportional sind, zu keiner Bewegung der Körper führen würde (vgl. im Anhang den Fall $n = 1$ bei Hermann). Dann geht Euler daran, den Begriff der Masse einzuführen; er gibt dabei teilweise seine Vorstellungen von Materie preis (seine Überlegungen sind etwas unklar und ungeordnet formuliert). Zunächst nimmt Euler an, daß die von Kräften angetriebenen Punkte eine "Größe"[23] haben (ohne näher zu erläutern was er mit dieser "Größe" meint; es stellt sich im Laufe der Darstellung heraus, daß die "Größe" letztlich die Masse ist). Außerdem will er unter Punkten keine "mathematischen, sondern physische verstehen, durch deren Zusammensetzung die Körper entstehen. Wir können uns nun zwei oder mehrere zusammengewachsen denken und erhalten so einen Körper, welcher zwar grösser als ein einfacher Punkt ist, aber doch unendlich klein bleibt." Sodann formuliert er "die Grundlage zur Bestimmung der Kraft der Trägheit" in dem Theorem: "Eine Kraft q übt auf einen Punkt b dieselbe Wirkung aus, wie eine Kraft p auf einen Punkt a, wenn $q : p = b : a$." In diesem Theorem wird den Punkten a bzw. b implizit eine Eigenschaft – vermutlich ist es die gerade eingeführte "Größe" – zugewiesen, die ebenfalls mit a bzw. b bezeichnet wird[24]. Setzt man $q = np$ und $b = na$, dann ergibt sich: "Der Punkt na erlangt durch die Kraft np dieselbe Beschleunigung[25], als a durch p." bzw. in Worten: "Um einem größeren Punkte dieselbe Geschwindigkeit, wie einem kleineren zu ertheilen, bedarf man einer grösseren Kraft und zwar einer desto grösseren, je mehr jener Punkt diesen an Grösse übertrifft." Aus seinem Theorem folgert Euler[26], "daß in der Mechanik die Materie oder die Masse der Körper in Betracht genommen werden muss. Man hat nämlich die Zahl der Punkte zu beachten, aus denen der zu bewegende Körper zusammengesetzt ist und die Masse des letzteren ihr proportional zu setzen. Man muss aber solche Punkte als gleich annehmen, auf welche dieselbe Kraft gleiche Wirkung ausübt, nicht aber die, welche gleich gross sind. ... die Menge der Materie eines Körpers [müssen wir] nach der Zahl der Punkte aus denen er zusammengesetzt ist, abschätzen"[27]. Daraus zieht er den Schluß, daß die Menge der Materie

[22] Auch Newton verweist auf diesen Satz.

[23] Im lateinischen Originaltext ist dies eine Verschiedenheit (diversitas), die für ein gegebenes Verhältnis [der Kräfte?] größer oder kleiner sein kann.

[24] Etwas später stellt Euler explizit fest, daß er die Masse genau so bezeichnet wie den Punkt.

[25] Hier tritt das erste Mal der Begriff der Beschleunigung (acceleratio) auf.

[26] Die Vorteilhaftigkeit von Eulers Vorgehensweise zuerst über eine "Größe" mathematisch zu spekulieren und diese hernach (und nicht sofort) Masse zu nennen, ist nicht leicht einzusehen.

[27] Hier scheint das Bild Eulers von der festen Materie folgendes zu sein: Es gibt Punkte unterschiedlicher Masse; diese setzen sich aus unterschiedlichen Anzahlen elementarer Punkte

zweier Körper, also deren Masse, gleich ist, wenn sie aus gleich vielen Punkten zusammengesetzt sind. Der Lehrsatz "Die Kraft der Trägheit jedes Körpers ist der Menge der Materie, woraus er besteht, proportional" führt zusammen mit Galileis Satz schließlich auf das Bewegungsgesetz in analytischer Form. In Eulers Bezeichnung: Wenn die Kraft p in Richtung der Bewegung (d.i. die Richtung der momentanen Geschwindigkeit) des Punktes mit Masse A und Geschwindigkeit c wirkt, dann gilt

$$dc = n\frac{p}{A}dt$$

oder, wenn man die universelle Proportionalitätskonstante n zu Eins fixiert[28],

$$\frac{dc}{dt} = p/A.$$

Aus dieser Gleichung leitet Euler den – von ihm nicht als solchen bezeichneten – Energiesatz $cdc = npds/A$ ab[29]. Er macht aber keinen Gebrauch davon; er sieht in ihm bloß eine Variante der Bewegungsgleichung. Eulers manchmal etwas unglückliches Bestreben, neue Erklärungen zu Newtons knappen Definitionen und Gesetzen zu liefern, führt beispielsweise beim Versuch das Additionstheorem der Kräfte[30] zu erläutern zu Bildern und Begriffen, die einer kritischen Untersuchung nicht standhalten. Er schreibt von der Teilbarkeit von Punkten, führt unendlich große Kohäsionskräfte ein, um die getrennten Teile der Punkte wieder zusammenzuführen und ersetzt die Kohäsionskraft kurz darauf durch eine "wiederherstellende Kraft", welche "imaginär und unbestimmt[31]" ist. Diese Kraft wirkt dann, wenn man sich einen Punkt in zwei (gleiche) Teile zerlegt denkt, gemäß dem Theorem (Lehrsatz): "Befinden sich zwei getrennte Teile eines Punktes in b und d, so werden sie durch die wiederherstellende Kraft im Schwerpunkt c der Teilchen b und d wieder vereinigt". Diese Begriffe und Vorstellungen sind wohl nur mehr von historischem Interesse.

zusammen. Solche elementare Punkte stehen aber im Gegensatz zu Eulers wiederholt geäußerter Auffassung, daß die Materie unendlich teilbar ist.

[28]Euler wählt einen anderen Weg. Er vergleicht immer wieder die aktuelle Kraft mit der Schwerkraft, was dazu führt, daß die Schwerkraft bzw. die Erdbeschleunigung g auch dort auftritt, wo sie nichts zu suchen hat (beispielsweise bei der kräftefreien Bewegung oder der Zentrifugalkraft). Dies kommt auch in der Wahl des Maßes der Geschwindigkeit zum Ausdruck: Statt der Geschwindigkeit c verwendet er auch häufig die einem Punkt zukommende Höhe v; das ist jene Höhe, die ein Körper fallen muß, um die Geschwindigkeit c zu erreichen. Das ist bei der Lektüre seiner Punktmechanik und seiner Mechanik der starren Körper zu beachten.

[29]Vgl. dazu Varignons Form von Newtons Proposition XXXIX in Buch I der Principia (s. Anhang).

[30]Eulers Lösungsansatz bei der Diskussion des Effektes einer zweiten Kraft im §146 verstößt gegen den auch von ihm festgehaltenen Umstand, daß gegebene Kräfte gegebene, **feste** Richtungen haben. Sie können daher im Allgemeinen nicht so angeordnet werden, wie von ihm gefordert.

[31]Dies dürfte ein Übersetzungsfehler sein. Im lateinischen Original heißt es "infinita" also unendlich.

Die Darstellung der physikalischen Grundlagen in den beiden ersten Kapitel ist keine Meisterleistung Eulers. Abgesehen von der langatmigen, vielfach wiederholenden Darstellung[32] sind manche seiner Erläuterungen nicht sehr geglückt. Die beiden ersten Kapitel wären besser durch die entsprechenden Teile der Principia und die Varignonsche Ableitung der Bewegungsgleichung zu ersetzen. Die große Leistung Eulers für die analytische Mechanik ist die bereits erwähnte Anwendung der Differentialrechnung in vielen Aufgaben und Beispielen in den folgenden Kapitel der Mechanik.

In Kapitel III stellt Euler Lösungen für die geradlinige Bewegung für verschiedene Kräfte vor. Zuerst untersucht er für den freien Fall bzw. einer überall konstanten, gleich gerichteten Kraft verschiedene Fragestellungen ausführlich. Danach studiert er die lineare Bewegung für Zentralkräfte[33] "welche die Körper in irgend einem vielfachen Verhältnis der Abstände" von dem Mittelpunkt der Kräfte anziehen; die Bewegung wird also von einer Kraft, die proportional zur n-ten Potenz des Abstandes ist, beeinflußt. Seine Diskussion ist etwas umständlich und mühsam zu verfolgen; das Fehlen einer Koordinatenachse entlang der Linie der Bewegung wirkt sich insbesondere bei der Diskussion der Kraft, die ja eine gerichtete Größe ist, aus (vgl. Anhang). Die Bewegung in solchen Zentralkräften analysiert Euler unter mannigfaltigen Aspekten und für verschiedene Werte von n. Unter anderem untersucht er das Verhalten der Lösung im Kraftzentrum; es hängt von n ab. Dabei korrigiert Euler eine 'Jugendsünde' in seiner Abhandlung 'Dissertatione physica de sono ...', Basel 1727 (E2 in Opera omnia III, 1). Im Anhang dieser Arbeit befinden sich sechs Thesen; die dritte stellt zunächst die Frage: Läßt man einen Stein in einem Kanal durch den Erdmittelpunkt fallen, was passiert im Erdmittelpunkt? Wird er dort verbleiben, überschreitet er den Mittelpunkt oder wird er reflektiert? Euler neigt der letzten Möglichkeit zu[34]. Diese Frage beantwortet er in der 'Mechanica' nun richtigerweise dahingehend, daß ein solcher Körper über den Mittelpunkt hinaus sein Bewegung fortsetzt[35]. Aber unmittelbar davor findet man eine neue problematische Interpretation seiner Rechnung: Im Falle der Gravitationskraft, $n = -2$, behauptet Euler, daß der (mit unendlicher Geschwindigkeit) eintreffende Körper vom Kraftzentrum reflektiert wird. Dabei denkt Euler eventuell an einen sehr schweren Körper im

[32] Wolfers, der Übersetzer, bemerkt vor seinen Anmerkungen: "... um mich möglichst streng dem Wortlaut des Originals anzuschliessen, [musste ich] mich bisweilen weitläufiger ausdrücken, als ich von freien Stücken gethan haben würde."

[33] Bei Euler Centripetal- bzw. Centrifugalkräfte; diese Bezeichnung wird teilweise noch heute verwendet.

[34] Galilei hat diese Fragestellung mehrmals in seinem 'Dialog' (1632) behandelt und richtig beantwortet. Es ist verwunderlich, dass Euler davon anscheinend keine Kenntnis hatte. (G. Galilei, Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanische, Nachdruck der Übersetzung von E. Stauss (1891), Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1982)

[35] In diesem Fall ist, das hat schon Newton gezeigt, die Kraft proportional zum Abstand von Kraftzentrum, d.h. $n = 1$.

Kraftzentrum, an dem der eintreffende Körper elastisch zurückgestreut wird; in der Rechnung kommt der streuende Körper allerdings nicht vor. Diese Überlegung wäre außerdem nicht vereinbar mit Eulers Ansicht, daß man " ... hier mehr der Rechnung, als dem Urteil vertrauen ..." muß. Zum Schluß dieses Kapitels widmet sich Euler dem inversen Problem der Erschließung der Kräfte aus den Gesetzmäßigkeiten der Bewegung entlang einer Geraden.

Die Thematik des vierten Kapitels, die geradlinige Bewegung eines Punktes[36] im widerstehenden Medium, schließt an das zweite Buch der Principia an. Die Widerstandskraft des umgebendem Mediums (Gas oder Flüssigkeit) ist eine Funktion der Geschwindigkeit des Punktes (Körpers), z.B. ist der Widerstand proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. In Flüssigkeiten, bei niedrigeren Geschwindigkeiten, ist der Widerstand meist proportional zur Geschwindigkeit selbst und in Gasen, bei höheren Geschwindigkeiten, eher zum Quadrat der Geschwindigkeit. Die Lösungen dieser beiden Fälle sind beliebte Aufgaben der theoretischen Mechanik. Auf Details der Eulerschen Untersuchungen in diesem Kapitel gehen wir nicht ein. Sie haben, wie schon angemerkt, Erwähnung in den Kommentaren von LeSeur und Jaquier zum zweiten Buch der Principia gefunden.

Das Kapitel V beschäftigt sich mit der krummlinigen Bewegung im leeren Raum. Euler zerlegt – in heutiger Sprechweise – die einwirkende Kraft und die 'Trägheitskraft' $md\vec{v}/dt$ in der momentanen Position des Punktes in Komponenten tangential und normal zur momentanen Bewegungsrichtung. Die Ableitung ist nicht so klar wie bei Varignon. Nach langer Rechnung bekommt Euler die Moivresche Form der Gleichung[37] für die krummlinige Bewegung in der festen Ebene, in der die Bewegung unter dem Einfluß einer Zentralkraft abläuft (2. Keplersches Gesetz; Newtons Proposition I, Buch I der Principia). Diese Beziehung kann man in beiden Richtungen lesen und so für eine konkrete Situation – gegebene Bahn oder gegebene Kraft – das direkte oder das inverse Problem lösen. Euler löst das inverse Problem für eine Zentripetalkraft, die dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional ist. Seine Ableitung der Ellipsengleichung könnte auch in einem modernen Buch der Mechanik stehen; die mathematische Form ist gleich geblieben.

3.1.2 Zweiter Teil: Die Bewegung entlang einer Linie oder auf einer Fläche

Der zweite Teil der ersten Mechanik ist zur Gänze der Bewegung eines Punktes gewidmet, dessen Bahn durch eine Bedingung eingeschränkt ist: der Bewegung

[36] Hier ist der Punktbegriff etwas problematisch, da der Widerstand proportional zur wirksamen Oberfläche ist.

[37] Die Moivresche Bahngleichung enthält geometrische Größen wie den Anstieg der Tangente und den Krümmungsradius; diese müssen erst durch die Koordinaten und deren Differentiale ausgedrückt werden. Die von Varignon verwendete Gleichung verwendet direkt die Änderung der Koordinaten; sie ist einfacher.

entlang einer gegebenen Linie oder auf einer vorgegebenen Fläche, sowohl im Vakuum als auch im widerstehenden Medium. Die Bewegung eines Körpers kann nämlich nicht nur durch Kräfte beeinflußt werden, sondern auch durch Bedingungen eingeschränkt sein. Beispiele dafür sind die Bewegung in einem Kanal oder die Pendelbewegung. Eulers Methode der Einbeziehung solcher Bedingungen in die geometrische Darstellung der Bewegung weisen den Weg für eine systematische Anwendung der allgemeinen Bewegungsgleichungen in solchen Fällen. Auch hier zeigt sich Eulers Präferenz für die mathematische (anstelle der physikalischen) Argumentation und die zu seiner Zeit vorhandene Ungenauigkeit der erst entstehenden physikalischen Begriffe. Dies drückt sich beispielsweise in seiner Interpretation des Druckes auf die Vorrichtung, welche die Bewegung entlang einer Linie oder Fläche erzwingt, aus[38]. Wieder tritt der (heute so benannte) Energiesatz auf, ohne besonders gewürdigt zu werden.

Im ersten Kapitel werden die physikalischen und vor allem die mathematischen Grundlagen für die in den übrigen drei Kapitel vorgeführten Aufgaben für die Bewegung eines Punktes auf einer Kurve und auf einer Fläche dargelegt und erarbeitet. Euler zerlegt die wirkende Kraft in eine zur Bahn, die jetzt durch die Bedingung vorgegeben ist[39], tangentiale Komponente und eine senkrechte; wirksam ist nur die tangentiale Komponente[40]. Dieser Teil zeigt was die Differentialgeometrie für die Mechanik leisten kann. Euler begnügt sich nicht nur mit der mathematischen Form der gegebenen Bedingungen, er überlegt auch wie die Bedingungen realisiert werden können. Es folgt ein wesentliches Theorem für die auf eine Linie eingeschränkte Bewegung[41]: Ein sich selbst überlassener Körper, der sich reibungsfrei entlang einer Linie bewegt - also z.B. einmal angestoßen wurde - behält stets dieselbe Geschwindigkeit, "wenn nur zwei beliebige zusammenhängende Elemente jener Linie nirgends einen Winkel von endlicher Größe mit einander bilden." (wenn die Linie also 'glatt' ist). In moderner Sprechweise: Die kinetische Energie des Körpers ist konstant. Im Beweis verwendet Euler eine fragwürdige, mathematische Argumentation für den zur Bewegung senkrechten Druck um verständlich zu machen, warum sich die Geschwindigkeit des Körpers nicht ändert.

Der § 29 ist sehr interessant, weil er Eulers Kraftvorstellung enthält: "... hier haben wir auseinander gesetzt, wie aus der Bewegung Kräfte entspringen. Dagegen kann man sich nicht vorstellen, wie Kräfte ohne Bewegung bestehen oder erhalten werden können[42]. Wir schliessen daher, dass alle Kräfte, die wir in der

[38]Überhaupt unterscheidet Euler nicht zwischen Kraft und Druck. So setzte er die Zentrifugalkraft einem Druck gleich. In der modernen Physik ist Druck eine Kraft pro Fläche.

[39]Bei der Bewegung unter dem Einfluß einer Kraft alleine war es die Komponente parallel zur Bewegungsrichtung, die allerdings erst bestimmt werden muß.

[40]In späterer Terminologie: die senkrechte Komponente wird durch die Zwangskraft, d.i. die Kraft, welche den Körper auf der gegebenen Linie hält, kompensiert.

[41]Allerdings darf sich die Linie nicht mit der Zeit verändern; diesen Fall betrachtete Euler nicht.

[42]Diese Ansicht paßt nicht zu dem auch von Euler anerkannten Konzept des Gleichgewichts

Welt wahrnehmen, aus der Bewegung hervorgehen; ...". Der letzte Satz deckt sich mit Eulers Interpretation der Schwerkraft als Druck des Äthers.

Das Kapitel wird durch die Diskussion der Bewegung auf einer Fläche beschlossen. Zuerst argumentiert Euler, daß auch auf der Oberfläche der Betrag der Geschwindigkeit bei einer freien Bewegung konstant bleibt, da ja die Einschränkung geringer ist als bei der Bewegung auf einer Kurve. Und schließlich beweist er den zentralen Satz der Bewegung auf einer Fläche: Ein Körper auf den keine Kräfte wirken bewegt sich auf einer geodätischen Kurve, d.i. jene Kurve zwischen zwei Punkten, für die der Weg am kürzesten ist. Danach wird die mathematische Darstellung der Geodäten erarbeitet: Unter Anwendung seiner Differentialgeometrie bestimmt er allgemein die Gleichungen für die Geodäten einer Fläche[43].

In den übrigen Kapitel befinden sich dann zahlreiche Aufgaben zur Bewegung auf einer Linie oder einer Fläche: Weil historisch interessant, erwähnen wir hier nur die Aufgaben zur isochronen[44] Bewegung, die schon das zentrale Thema in Huygens Buch über die Pendeluhr war.

Hunds Beurteilung[45], daß Eulers Mechanik "ein ausführliches, leicht faßliches Lehrbuch der einfachen Mechanik" ist, entspringt wohl einem Enthusiasmus für Eulers unbestrittene Verdienste. Er hält aber auch fest, daß die Behandlung neu ist, nicht die physikalische Grundlage. Abschließend meint Hund: "Aber heute hat man kürzer gefaßte Lehrbücher der Mechanik."

3.2 Eulers zweite Mechanik

Eulers Theorie der Rotationsbewegung des starren Körpers[46] war ein wesentlicher Schritt in der Entwicklung der Mechanik[47]. Damit verbunden war die Einführung neuer Begriffe. Euler wendete die Bewegungsgleichungen seiner Punktmechanik auf die Elemente eines Körpers an und leitete so Gleichungen

von Kräften in der technischen Mechanik.

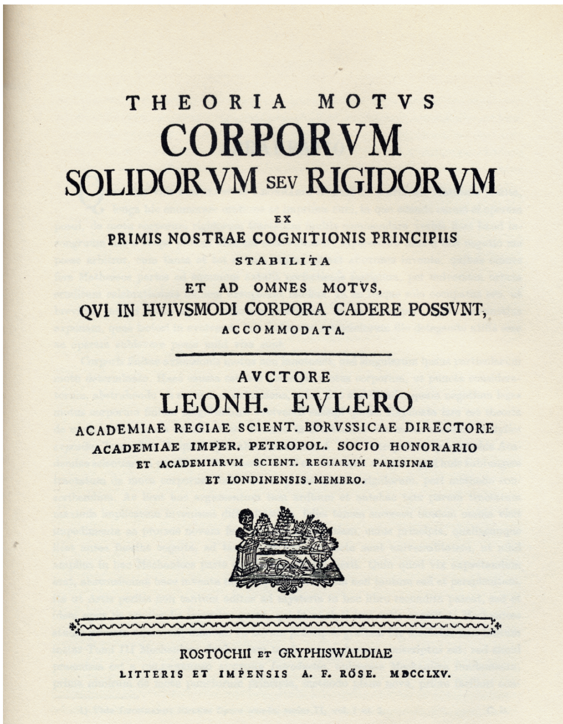
[43]Diese Gleichungen liefern nicht automatisch die kürzeste Linie, sondern nur im Kleinen bzw. lokal; ein entsprechender Nachweis ist zusätzlich erforderlich.

[44]Die Dauer dieser periodischen Bewegung ist unabhängig von der Auslenkungsamplitude.

[45]F. Hund, Geschichte der physikalischen Begriffe, B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim 1989

[46]'Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum', 1765; deutsche Übersetzung: 'Leonhard Eulers Theorie der Bewegung fester oder starrer Körper' mit Anmerkungen und Erläuterungen herausgegeben von J. Ph. Wolfers, Greifswald 1853, (E289A).

[47]In Lagranges 'Mecanique analytique' wird Eulers Theorie nur kurz erwähnt. Lagrange verweist auf seine Mitteilung aus dem Jahr 1773 und erwähnt dabei Eulers Satz über die Hauptträgheitsmomente. Umgekeht erwähnt auch Euler in der Ergänzung für die zweite Auflage der zweiten Mechanik (1790 posthum erschienen) diese Mitteilung Lagranges und bedauert, daß es ihm nicht gelang "alle seine Rechnungen zu durchdringen. ... [und] wegen meiner mangelhaften Augen auf keine Weise hoffen kann, alle analytischen Kunstgriffe, deren er sich bedient hat, zu durchforschen."



THEORIA MOTVS
CORPORVM
SOLIDORVM SEV RIGIDORVM
EX
PRIMIS NOSTRAE COGNITIONIS PRINCIPIIS
STABILITA
ET AD OMNES MOTVS,
QVI IN HVIVSMODI CORPORA CADERE POSSVNT,
ACCOMMODATA.

AVCTORE
LEONH. EVLERO
ACADEMIAE REGIAE SCIENT. BORVSSICAE DIRECTORE
ACADEMIAE IMPER. PETROPOL. SOCIO HONORARIO
ET ACADEMIARVM SCIENT. REGIARVM PARISINAE
ET LONDINENSIS MEMBRO.

ROSTOCHII ET GRYPHISWALDIAE
LITTERIS ET IMPENSIS A. F. RÖSE. MDCCLXV.

Abbildung 5: Die Titelseite der zweiten Mechanik

für die Rotationsbewegung her. Diese Gleichungen hielt Euler für ein neues, unabhängiges Prinzip[48]; diese Unabhängigkeit ist aber, schon auf Grund der Herleitung, nicht gegeben. Die Gleichungen Eulers sind aber besser geeignet die Rotationsbewegung zu beschreiben.

3.2.1 Die Einleitung

Ehe Euler die Rotationsbewegung eines Körpers behandelt, gibt er in der "Einleitung enthaltend notwendige Erläuterungen und Zugaben zur Bewegung von Punkten" eine Zusammenfassung der Punktmechanik, in der er die Bewegung eines Massenpunktes nicht mehr auf ein begleitendes Koordinatensystem wie in der ersten Mechanik bezieht, sondern er verwendet ein festes, kartesisches Koordinatensystem. Er erhält damit drei Gleichungen von ähnlicher Gestalt:

$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}, \quad \frac{ddy}{dt^2} = \frac{\lambda q}{A}, \quad \frac{ddz}{dt^2} = \frac{\lambda r}{A};$$

hier ist A die Masse des Punktes (Körpers), p, q, r sind die Kräfte entlang der Koordinatenachsen x, y, z und λ ist eine Proportionalitätskonstante. Ein solches

[48]Découverte d'un nouveau principe de mécanique, Berlin 1750, (E177 in Opera omnia II, 5). Auch heute noch sind vor allem technisch orientierte Wissenschaftler, wie z.B. Truesdell oder Szabo, dieser Meinung.

Koordinatensystem hatte er bereits in seiner Mitteilung 'Recherches sur le Mouvement des corps célestes en général' von 1747 (E112 in Opera omnia II, 25) an die Berliner Akademie der Wissenschaften eingeführt[49]. Diese Gleichungen sind die Urform der heute am häufigsten verwendeten Komponentendarstellung der grundlegenden Bewegungsgleichung der analytischen Mechanik (vgl. Anhang). Für Euler ist diese Bewegung entlang der Achsen zwar "nur erdacht" sie kann aber "als wirkliche Bewegung" betrachtet werden. Zu den Vorteilen dieser Koordinatendarstellung bemerkt er:

> "... da ich dieses Hülfsmittels in den früheren Theilen der Mechanik nicht bedient habe, bin ich dort auf sehr verwickelte Rechnungen verfallen."

Obwohl der Titel der Einleitung die Behandlung der Bewegung von Punkten verspricht, verwendet Euler nur den Begriff Körper. Als wesentliche Eigenschaft eines Körper sieht er die Undurchdringlichkeit an; diese verhindert, daß sich zwei Körper oder ihre kleinsten Elemente an einem Ort befinden können. In diesem Zusammenhang tritt der Ausdruck "Elemente oder körperliche Punkte" auf, offensichtlich als Teile eines Körpers, ohne aber deren Eigenschaften anzugeben. Die Undurchdringlichkeit ist für Euler auch der "Ursprung der Kräfte". Denn wegen der Undurchdringlichkeit müssen zwei Körper beim Zusammentreffen notwendigerweise eine Änderung des Zustandes erfahren und weil Zustandsänderungen von Kräften bewirkt werden, üben Körper Kräfte aufeinander aus. "Die Größe dieser Kräfte wird nicht durch die Undurchdringlichkeit, welche nämlich nicht messbar ist, bestimmt, sondern durch die Änderung des Zustandes, ..." Dann stellt Euler die Frage ob alle Kräfte aus der Undurchdringlichkeit entspringen. Euler bejaht diese Frage, denn wenn sie in der Entfernung wirkten – solche Kräfte schreibt Euler Geistern zu – "wäre es alsdann nicht klar, wie hierdurch die Erhaltung des Zustandes gestört werden könnte." Hier steht Euler auf der Seite Descartes. Euler definiert dann als Masse oder Menge der Materie eines Körpers die Größe der Trägheit, "vermöge welcher er das Bestreben hat, sowohl in seinem Zustand zu verharren, als auch jeder Veränderung zu widerstehen." Den verschiedenen Inhalt an Materie von Körpern gleicher Größe erklärt er durch unterschiedlich große Poren im Körper, wobei die in den Poren enthaltene Materie bei gleichem Volumen eine viel kleinere Masse hat[50]. Auf den Zusammenhang zwischen den Punkten seiner ersten Mechanik und den Elementen des Körpers geht Euler nicht näher ein. Die Bewegungstheorie der Punktteilchen wird einfach auf (unendlich) kleine Körper angewendet.

[49] Nach Lagrange ist diese Zerlegung auf Maclaurin, 'A Treatise of fluxions', 1742, zurückzuführen. Nach Truesdell ('An Idiot's fugitive Essays on Science, Springer-Verlag, New York 1984, p. 334) kommt eine solche Zerlegung der Bewegungsgleichung bei Maclaurin nicht vor – sie ist ein auf Lagrange zurückzuverfolgender Fehler in der historischen Darstellung – sondern Euler hat in der angegebenen Mitteilung die Priorität.

[50] Diese Wortwahl ist jener von Euler äquivalent und absichtlich genau so unpräzise.

3.2.2 Der Hauptteil

Im Hauptteil leitet Euler die völlig neuen Gleichungen für die Drehung eines starren Körpers her, zunächst für die Drehung um eine feste Achse und dann mit zunehmendem Komplexitätsgrad bis zur allgemeinen Drehung eines Körpers. Ein starrer Körper ist ein solcher, "dessen einzelne Elemente beständig dieselben Abstände beibehalten". Weiter: "Ein starrer Körper kann demnach nur eine solche Bewegung annehmen, bei welcher alle seine Punkte [!] beständig dieselben gegenseitigen Abstände beibehalten; ...[51]". Insgesamt zeigt Eulers Argumentation, daß er den starren Körper als Kontinuum betrachtet, welches man sich gegebenenfalls in kleine Elemente zerlegt denken kann. Die Gesetze der Translationsbewegung des Körpers folgen über eine Proportionalitätsrelation aus der Gesetzen der Bewegung eines Elementes und haben daher die bereits bekannte Form. Bei der drehenden Bewegung um eine Achse geht die Bewegung des ganzen Körpers mit Masse M aus der Summe der Bewegungen der untereinander festen Elemente mit den Massen dM um diese Achse hervor[52]. Auf diese Weise erhält Euler seine neuen Bewegungsgleichungen.

Schon in der Antike bekannt ist der Massenmittelpunkt, auch als Schwerpunkt bezeichnet. Bei Euler heißt er Mittelpunkt der Trägheit; seine Lage ist durch die Summe (Integrale) über die Momente der Elemente, $\int xdM$, $\int ydM$, $\int zdM$, gegeben (vgl. Anhang). Der Massenmittelpunkt und die Gesamtmasse bestimmen die Translationsbewegung eines Körpers. Für die Drehung eines Körpers muß Euler neue physikalische Größen, wie z.B. Winkelgeschwindigkeit und Trägheitsmoment, entwickeln.

Der linearen Geschwindigkeit der Translationsbewegung entspricht bei einer Drehung die **Winkelgeschwindigkeit**: "Die Winkelgeschwindigkeit ist bei der drehenden Bewegung die Geschwindigkeit desjenigen Punktes, dessen Entfernung von der Drehungsaxe durch die Einheit ausgedrückt wird". Anders gesagt: Wählt man bei einer um den Mittelpunkt rotierenden Kreisscheibe einen Punkt auf der Scheibe, dann ist dessen Winkelgeschwindigkeit der pro Zeiteinheit zurückgelegte Winkel.

Der Rolle der Masse bei der Translationsbewegung spielt das **Trägheitsmoment** bei der Rotation eines Körpers um eine Achse (oder einen Punkt). Das Trägheitsmoment hängt von der Massenverteilung bezüglich der Drehachse ab. Ein einfaches Beispiel ist das Pendel einer Wanduhr: Je weiter weg die Pendellinse

[51] Obwohl sich zunächst prinzipiell jedes der (unendlich) vielen Elemente des Körpers in drei unabhängige Richtungen bewegen kann, bleiben dem Körper wegen der Bedingung der Starrheit nur 6 Freiheitsgrade der Bewegung: 3 der fortschreitenden Bewegung und 3 der Drehbewegung.

[52] Die Gesamtmasse ist die Summe (das Integral) der Massen der Elemente:

$$M = \int dM.$$

(genauer: ihr Zentrum) vom Drehpunkt ist, um so größer ist das Trägheitsmoment und um so mehr Energie ist nötig, um das Pendel in Schwingung zu versetzen. Bereits in Huygens' 'Horologium oscillatorium' (Die Pendeluhr, 1673) tritt das — allerdings von Huygens unbenannt gebliebene – Trägheitsmoment auf. Eulers Definition:

> "Das Moment der Trägheit eines Körpers in Beziehung auf eine beliebige Axe ist die Summe aller Producte, welche entstehen, indem man die einzelnen Elemente des Körpers durch die Quadrate ihrer Abstände von der Axe multiplicirt."

Der mathematische Ausdruck für das Moment der Trägheit eines Massenelementes (Punktmasse) mit der Masse dM im Abstand r von der Drehachse ist

$$dMr^2.$$

Das Trägheitsmoment Ma^2 (Eulers Bezeichnung) eines Körpers mit der Gesamtmasse M ist die Summe (Integral) über die Massenelemente:

$$Ma^2 = \int dMr^2.$$

(Anmerkung: Ma^2 ist auch das Trägheitsmoment eines fiktiven Punktes mit der Gesamtmasse M im Abstand a von der Drehachse.)

In einem Körper von beliebiger Gestalt und Massenverteilung sind die für die allgemeine Drehbewegung maßgeblichen Größen die Trägheitsmomente. Die Entdeckung, daß es in einem beliebigen Körper drei freie Rotationsachsen gibt, geht auf Segner[53] zurück, der dies in seiner Abhandlung 'Specimen theorie turbinum', Halle 1755, veröffentlichte. Dies wurde auch von Euler anerkannt[54]. Euler zeigt, daß für einen Körpers von beliebiger Gestalt und Massenverteilung diese von ihm als "Hauptaxen" (der Trägheit) bezeichneten Achsen, untereinander orthogonal sind und ein natürliches, fest mit dem Körper verbundenes kartesisches Koordinatensystem mit dem Massenmittelpunkt als Ursprung bilden. Unter den Achsen, die durch den Mittelpunkt gehen gibt es nämlich fast stets (ausgenommen z.B. eine homogene Kugel) Achsen für die das Trägheitsmoment maximal bzw. minimal ist. Diese beiden Achsen stehen senkrecht aufeinander. Zusammen mit der Achse, die senkrecht auf die beiden vorigen Achsen steht, bilden diese drei Achsen besondere Koordinatenachsen, eben die Hauptachsen. Die Trägheitsmoment bezüglich dieser Hauptachsen werden heute als Hauptträgheitsmomente eines Körpers bezeichnet; sie bestimmen die Art und Weise der Rotation eines

[53] J.A. Segner (1704-1777), Mathematiker, Nachfolger von Ch. Wolff an der Universität Halle.

[54] Siehe dazu die Einleitung zur 'Theoria motus ...' von W.J. Karsten und den Beitrag von G.K. Mikhailov 'Euler und die Entwicklung der Mechanik' in den Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der DDR, Jahrgang 1985, Nr. 1N, p. 64.

Körpers. Das Trägheitsmoment um eine beliebige Achse läßt sich durch diese Hauptträgheitsmomente ausdrücken[55]. Die freie Drehung eines Körpers um eine dieser drei Achsen bleibt zeitlich unverändert (Kapitel VIII; um eine beliebige Drehachse ist die Drehung komplizierter). Die Stabilität der Drehung um eine solche Achse wurde erst später untersucht. Nur um die Achsen des größten und kleinsten Trägheitsmoments ist die Drehung stabil, während sie um jene mit dem mittleren Trägheitsmoment instabil ist: Selbst wenn es gelungen ist den Körper so in Drehung zu versetzen, daß er genau um diese Achse rotiert genügt ein winziger Stoß um ein Wobbeln des Körpers herbeizuführen.

Die Gleichung für die Rotationsbewegung um eine feste Achse: Analog zum analytischen Bewegungsgesetz für die gerade Translation eines Massenpunktes

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

gilt für die Rotation um eine vorgegebene Achse[56]

$$I\frac{d\omega}{dt} = N;$$

das Gesetz ist hier in moderner Bezeichnung angegeben, darin ist I das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse, ω die Winkelgeschwindigkeit um die Drehachse und N das Drehmoment der wirksamen Kraft[57]. Aufgaben dazu werden von Euler in Kapitel VII, "Von der schwingenden Bewegung schwerer Körper", gelöst.

Der Höhepunkt des Buches ist das Gesetz für die allgemeine Rotation eines starren Körpers, der in diesem Zusammenhang als Kreisel bezeichnet wird. Die Rotationsbewegung ergibt sich aus den **Eulerschen Kreiselgleichungen** (Kap. XV) für die 3 Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im System der Hauptträgheitsachsen; in Eulers Schreibweise:

$$\begin{aligned} dx + \frac{c^2-b^2}{a^2}yzdt &= \frac{2gPdt}{Ma^2} \\ dy + \frac{a^2-c^2}{b^2}xzdt &= \frac{2gQdt}{Mb^2} \end{aligned}$$

[55] Das Trägheitsmoment um solche Achsen ist um die Masse multipliziert mit dem Quadrat des Abstandes der Achse vom Mittelpunkt größer. Somit findet man bei Euler bereits den Steinerschen Satz! Der Satz von Steiner geht nach allgemeiner Auffassung auf Jakob Steiner (1796-1863), einen Schweizer Mathematiker zurück.

[56] In Eulers Notation:

$$d\omega = \frac{Vfgdt^2}{\int r^2 dM}.$$

Hier ist Vf das Moment der Kraft. Das Auftreten der Erdbeschleunigung g wird gleich bei den allgemeinen Kreiselgleichungen erläutert.

[57] Wenn die Kraft F, welche auf das Massenteilchen wirkt, senkrecht auf die Drehachse steht, dann ist das Drehmoment gegeben durch den senkrechten Abstand f der Drehachse zur Kraft: $N = fF$, sonst trägt nur die senkrechte Komponente der Kraft zum Drehmoment bei.

$$dz + \frac{b^2 - a^2}{c^2} xydt \quad = \quad \frac{2gRdt}{Mc^2},$$

hier sind Ma^2, Mb^2, Mc^2 die 3 Hauptträgheitsmomente, x, y, z die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit und $2gP, 2gR, 2gQ$ sind die Komponenten des Drehmoments. Der Faktor $2g$ kommt durch die Festlegung der Zentrifugalkraft mit der Schwerkraft als Maß zustande; die übliche Schreibweise erhält man, wenn man $2g = 1$ setzt. Die Lösungen der Gleichungen ergeben die Drehung des Körpers im körperfesten System der Hauptträgheitsachsen. Was man aber üblicherweise beobachtet ist die Drehung von einem als ruhend genommenen Standpunkt außerhalb des Körpers. Daher muß man die Größen der Drehbewegung noch auf das System eines solchen Beobachters transformieren.

Der mathematische Übergang zwischen zwei Koordinatensystemen, die sich gegeneinander drehen, erfordert u.a. zwei von Euler stammende Erkenntnisse: Eulers Theorem und die Eulerwinkel. Eulers Theorem besagt, daß zwei beliebig orientierte Koordinatensysteme mit einem gemeinsamen Ursprung durch eine einzige Drehung um eine bestimmte Achse ineinander übergeführt werden können. Oder anders gesagt, bei der Drehung eines Koordinatensystems gibt es stets eine Linie, die unverändert bleibt; diese ist die Drehachse. Die Verdrehung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems gegenüber einem anderen kann durch drei Parameter eindeutig angegeben werden (analog zu den drei Koordinatendifferenzen bei der Translation eines Koordinatensystems). Eine Standardwahl sind die drei von Euler in seiner Abhandlung 'Du mouvement d'un corps solide quelconque lorsq'il tourne autour d'un axe mobile', Berlin 1767 (E336 in Opera omnia II, 8), eingeführten Winkel.

Der Massenmittelpunkt, das System der Hauptachsen und die Hauptträgheitsmomente bestimmen also das Verhalten eines Körpers unter dem Einfluß einer Kraft vollständig. Seine resultierende Bewegung (Translation und Rotation) kann man aus den entsprechenden Gleichungen bestimmen. Euler:

> "Auf welche Weise auch ein starrer Körper durch Kräfte angetrieben werden mag, so ist die augenblickliche Wirkung in diesen vier Umständen enthalten: erstens der Veränderung der Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Trägheit [Massenmittelpunkt]; zweitens der Veränderung der Geschwindigkeit der Richtung dieses Punktes; drittens der Veränderung der Winkelgeschwindigkeit um die, durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende, Drehungsaxe und viertens der Veränderung der Drehaxe selbst."

Die ersten beiden Veränderungen kann man aus den Gleichungen für die Translation des Körpers bestimmen (falls die Translation und die Rotationsbewegung unabhängig voneinander sind, im Allgemeinen beeinflussen sich nämlich die beiden Bewegungen[58]; vgl. Anhang). Die dritte Veränderung folgt aus den Eulerschen Kreiselgleichungen und die vierte aus den Gleichungen für die Bewegung der Drehachse, die hier nicht angegeben wurden. Durch diese Gleichungen wird der Bezug zum System des Beobachters hergestellt. Euler bestimmt die Lösung für die kräftefreie Bewegung eines beliebigen starren Körpers (Eulerscher Fall der Drehbewegung).

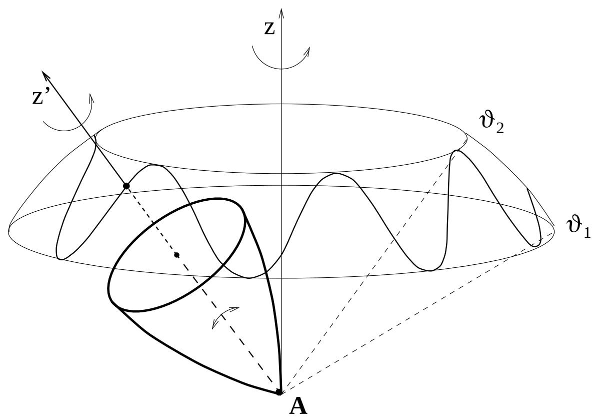


Abbildung 6: Die Drehung eines im Punkt **A** unterstützten Kinderkreisels: Die Symmetrieachse z' des Kreisels bewegt sich während ihrer Drehung um die Vertikale z zwischen zwei Winkeln ϑ_1 und ϑ_2, sodaß während der gesamten Bewegung die Wellenlinie als Spur der Symmetrieachse auf einer gedachten Kugeloberfläche entsteht.

Die Komplexität der Drehbewegung zeigt das Beispiel des Kinderkreisels (s. Abb. 6). Die gesamte Drehbewegung kann man in drei Bewegungen aufteilen. Man unterscheidet die Drehung um die Symmetrieachse des Körpers, die Nutation (d.i. die Nickbewegung) der Symmetrieachse und die Präzession (d.i. die Drehbewegung) der Symmetrieachse um den unterstützenden Punkt **A** (Abb. 6). Diese Bewegungen kann man durch die Spur der Drehachse auf einer den Kreisel umgebenden Kugeloberfläche veranschaulichen. Die Spuren der Drehachse für drei Varianten der Drehbewegung sind in Abb. 7 dargestellt.

Auf dem weiteren Weg der Entwicklung zur heutigen Theorie der Drehbewegung eines Kreisels begegnet man den Namen Joseph Louis Lagrange (1736-1813),

[58]Als Beispiel sei das Abrollen zweier Zylinder mit gleichen Abmessungen und gleicher Masse, einer davon ein Vollzylinder der andere ein Hohlzylinder, aus gleicher Höhe auf einer schiefen Ebene angeführt. Der Hohlzylinder rollt langsamer, weil er ein größeres Trägheitsmoment besitzt und daher eine gleiche Rotationsgeschwindigkeit eine höhere Energie erfordert. Weil die Anfangsenergie der beiden Zylinder gleich ist (in der Ruhe wirkt nur die Schwerkraft), geht der größere Bedarf an Rotationsenergie beim Hohlzylinder auf Kosten der Translationsenergie. Die beiden Bewegungen sind hier durch die Bedingung des Rollens gekoppelt.

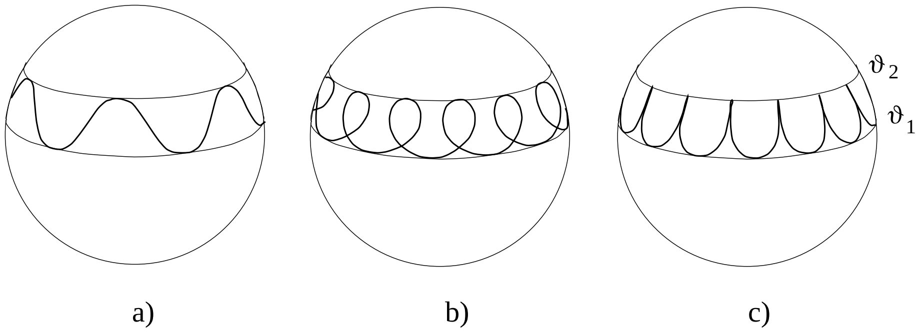


Abbildung 7: Drei Typen von Spuren der Symmetrieachse

Siméon Denis Poisson (1781-1840) und Luis Poinsot (1777-1859). Insbesondere Poinsot hat die Beschreibung der Drehbewegung vereinfacht (s. Anhang). In der 'Théorie nouvelle de la rotation des corps', 1852, bringt er die Kreiselbewegung in eine anschauliche, kompaktere Form. Der freien Drehbewegung eines beliebigen starren Körpers entspricht das Abrollen des sogenannten Trägheitsellipsoids (s. Abb. 8), dessen Abmessungen durch die Hauptträgheitsmomente bestimmt sind, auf einer Ebene.

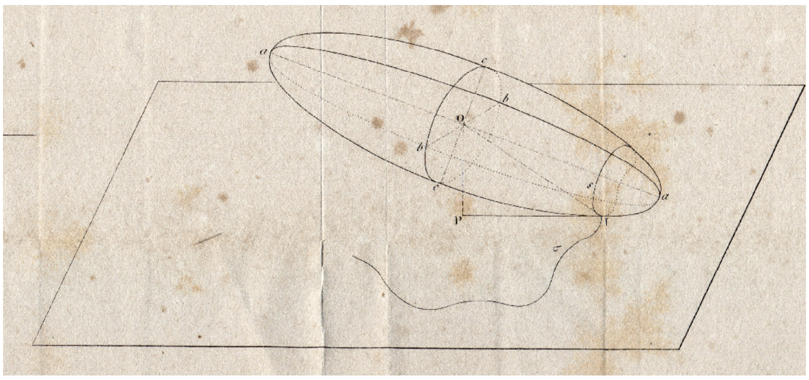


Abbildung 8: Das Abrollen des Trägheitsellipsoids nach Poinsot

4 Beiträge zur Himmelsmechanik

Es gibt viele Arbeiten Eulers, die sich mit der Bewegung der Planeten und des Mondes beschäftigen. Euler hat die auf diesem Gebiet bestehenden theoretischen Ansätze mathematisch behandelt, er hat jedoch der Newtonschen Himmelsmechanik keine neuen Vorstellungen hinzugefügt. Die meist sehr verwickelten Gleichungen hat er sehr einfallsreich ausgewertet und dabei trickreich kleine Größen eingeführt, die eine systematische Entwicklung in einem Näherungsverfahren ermöglichten.

Noch 1747, 'Recherches sur le mouvement des corps celestes en general' (E112 in Opera omnia II, 25), bezweifelte Euler die $1/r^2$-Abhängigkeit des Newtonschen Gravitationsgesetzes. Daher ist es um so verwunderlicher, daß er 1744 die Theorie der Planeten veröffentlichte, in der er ausschließlich Kegelschnittlinien als Bahnen der Planeten und Kometen betrachtete. In seinen beiden Mondtheorien geht Euler wie Newton vom Dreikörperproblem Sonne-Erde-Mond aus und bestimmt die Bewegung des kleinsten Körpers, des Mondes. In 'De causa gravitationis' (keine Eneström-Nummer; abgedruckt in Miscellanea Berolinensia 7, 1743, p. 360-370 und in Opera omnia II, 31) beschäftigt sich Euler mit der Gravitationskraft[59]; die Newtonsche, mathematische Form ist ihm zu wenig. Die Schwerkraft ist für ihn eine Folge des Druckes des Äthers. Seine Theorie der Rotation starrer Körper hat er in 'Recherches sur le mouvement de rotation des corps celestes' (E308 in Opera omnia II, 29) angewendet. Eulers Arbeit zur Erklärung der Gezeiten 'Inquisitio physica in causam fluxus ac refluxus maris' von 1741 (E57 in Opera omnia II, 31) wurde, wie schon erwähnt wurde in den dritten Band von J. LeSeurs und F. Jaquiers Ausgabe der 3. Auflage der Principia (Genf 1742) aufgenommen (E57b). Auch mit der Gestalt der Erde hat sich Euler beschäftigt: 'Von der Gestalt der Erden' (E32 in Opera omnia III, 2) enthält allgemeine Überlegungen zur Gestalt der Erde, ob sie eher abgeplattet oder elongiert ist. Weitere Arbeiten dazu: 'Theoria parallaxeos, ad figuram terrae sphaeroidicam accomodata' (E529 in Opera omnia II, 30) und 'Enodatio difficultatis super figura Terrae a vi centrifuga oriunda' (E619 in Opera omnia II, 28).

4.1 Die Theorie der Planeten

Die 'Theoria motuum planetarum et cometarum', 1744 (E66 in Opera omnia II, 28)[60], besteht aus im ersten Teil aus Anleitungen zur Bestimmung der Bahnelemente und der Bewegung von Planeten und Kometen. In 12 Aufgaben mit Lösungen und Folgerungen werden unter der Voraussetzung, daß die Bahnen Kegelschnittlinien sind, die Sonne im Brennpunkt liegt und der Flächensatz (das zweite Keplersche Gesetz) gilt, aus Beobachtungsdaten die Bahnelemente (d.s. die Bestimmungsstücke) berechnet. Im zweiten Teil werden seitenlang die Bahnen des Kometen von 1680/81 (des Kirchschen Kometen) und des Kometen von 1744 (des Klinkenbergschen Kometen) berechnet. Für den Kometen von 1680/81 erhält Euler aus den angegebenen, tabellierten Beobachtungsdaten als[61] "Bahn

[59] Vgl. auch: K. R. Nick, Kontinentale Gegenmodelle zu Newtons Gravitationstheorie, Ph. D. thesis, Frankfurt 2001

[60] 'Theorie der Planeten und Cometen' von Johann Freyherrn von Paccassi übersetzt, 1781 (E66A)

[61] Zitat aus der Paccassi-Ausgabe.

Leonh. Eulers,
Director der Königl. Academie der Wissenschaften von Berlin, Mitglied der Kaiserl. Academie der Wissenschaften von Petersburg, der Königl. von Paris, London, und Göttingen rc. rc.

Theorie der Planeten und Cometen

von Johann Freyherrn von Paccassi übersetzt, und mit einem Anhange und Tafeln vermehrt.

Wien,
gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern,
kaiserl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.

1781.

Abbildung 9: Die Titelseite der deutschen Übersetzung der 'Theoria motuum planetarum et cometarum'

des Cometen eine sehr eccentrische, und der Parabel nahe kommende Ellypse" und eine Umlaufszeit von 170,77 Jahren. Beim Kometen von 1744 sind die Daten unzureichend und Euler kann die Bahnellipse nicht berechnen, daher geht er von zwei Annahmen über die Entfernung des Kometen aus, die sich um 5% unterscheiden, und berechnet für beide Fälle die Bestimmungsstücke einer stark elliptischen (eventuell sogar hyperbolischen) Bahn. Die berechneten Umlaufzeiten sind entweder 41,69 oder 431,34 Jahre. Der Anhang des Werkes enthält weitere Aufgaben.

4.2 Das Zweizentrenproblem

Eigentlich zu den Themen der analytischen Mechanik gehörig sind Eulers Arbeiten über das Zweizentrenproblem (Opera omnia II, 6):

- 'De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti', 1766 (E301)
- 'De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti', 1767 (E328)
- 'Problème. Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés trouver les cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique, résolu par M. Euler', 1767 (E337).

Die Bewegung eines Körpers in zwei festen Kraftzentren, die sich in einem gegebenen Abstand befinden, ist eine sehr anspruchsvolle Aufgabe der analytischen Mechanik. Wie Euler aber in den Einleitungen dieser Arbeiten erwähnt, stellt dieses Problem eine Vorstufe zum Dreikörperproblem dar, das er ausführlich in seinen Mondtheorien untersucht. Das Zweizentrenproblem ist von besonderem Interesse, weil es – in der Hierarchie zunehmender Komplexität – das letzte sogenannte *integrable* (vereinfacht gesagt: analytisch lösbare) System ist[62]; das 'echte' Dreikörperproblem ist im Allgemeinen nicht mehr analytisch lösbar. In der ersten und dritten Arbeit bestimmt Euler die Bahn für die Bewegung des Körpers in einer festen Ebene in der auch die beiden Zentren liegen, wobei die dritte Arbeit kompakter und systematischer abgefaßt ist. Euler findet, daß die Bahngleichungen für gewisse Werte der Parameter algebraischer Natur sind. In der zweiten Arbeit läßt Euler auch eine räumliche Bewegung des Körpers zu. Nach Euler wird das Zweizentrenproblem mit Hilfe der Hamilton-Jacobischen Form der analytischen Mechanik sehr elegant und übersichtlich gelöst werden.

4.3 Die beiden Mondtheorien

Die beiden Mondtheorien, 'Theoria motus lunae exhibens omnes ejus inaequalitates', 1753 (E187 in Opera omnia II, 23), und 'Theoria motuum lunae, nova methodo pertractata una cum tabulis astronomicis,..., 1772 (E418 in Opera omnia II, 22), sind analytische Ausarbeitungen des Newtonschen Programmes das System Erde-Mond im Schwerefeld der Sonne zu untersuchen. In beiden Theorien gelingt es Euler durch die Einführung von geschickt gewählten Koordinaten – den Abweichungen von den mittleren Bahnen – dieses nicht exakt lösbare System mit Näherungsverfahren zu behandeln, die sowohl eine klare Systematik als auch gute Konvergenzeigenschaften aufweisen. Die beiden Arbeiten unterscheiden sich durch die verwendeten Koordinaten, in der zweiten Theorie sind es die besser kontrollierbaren kartesischen Koordinaten, und durch die Näherungsmethode. In beiden Werken sind umfangreiche Mondtafeln das Resultat.

5 Analytische Theorien der elastischen und flüssigen Körper

Durch Abgehen von der Bedingung der Starrheit der Körper gelangt man entweder zum elastischen Körper oder zum flüssigen Körper. Sowohl die Elastizitätstheorie als auch die Hydrodynamik sind eine eigene Disziplin geworden. Die Darstellung der Beiträge Eulers auf diesen Gebieten geht über den gesetzten Rahmen hinaus. Für, allerdings wissenschaftliche, Einführungen sei auf die Zusammenfas-

[62] Im Allgemeinen ist die Lösung nur als Integral darstellbar, welches näherungsweise oder numerisch berechnet werden kann.

sungen von Truesdell zu den nachfolgend erwähnten Bänden der Opera omnia verwiesen: Elastizitätstheorie: Serie II, Bde. X und XI/1; XI/2; Hydrodynamik: Serie II, Bde. XII und XIII, mit den einleitenden Bemerkungen Truesdells. Truesdells Wertungen sind dabei mit großer Vorsicht zu behandeln (s. z.B. Truesdells Beurteilung von Lagrange, Bd. XI/2, p. 411), sein historisches Wissen ist unbestritten groß.

Nachwort

Weiterführende Literatur sind vor allem die einführenden Kommentare der Bände der Opera omnia, die im Literaturverzeichnis angegeben sind. Überhaupt nicht berücksichtigt wurden Eulers Beiträge zur Statik der Kräfte (vgl. Opera omnia II, Vorwort von Bd 3: Eulers Plan zur Statik und Bd 4: Fragment der Statik) und über mechanische Maschinen.

6 Physikalisch-mathematische Anmerkungen

6.1 Varignons zweite allgemein Regel

Varignons einleitende Überlegungen in der Mitteilung an die Akademie (Mém. Paris 1700, pp. 22-27) sind etwas umständlich; sie sind nur aus seinen vorangehenden Arbeiten heraus verständlich. Für die Ableitung sind sie nicht wesentlich, daher ist die folgende Darstellung etwas verkürzt. Außerdem sind einige der folgenden Gleichungen eigentlich Proportionalitätsrelationen aber wie bei Varignon werden Proportionalitätskonstante weggelassen; sie können in die Wahl der Einheiten absorbiert werden.

Ein Körper bewegt sich entlang der x-Achse; sei dx die Distanz, welche mit gleichförmiger Geschwindigkeit

$$v = dx/dt$$

(1. Regel) während des Zeitelementes dt zurückgelegt wird. Wegen der Kraft y ändert sich aber die Geschwindigkeit um dv. Sei nun ddx $(= d^2x)$ die Zunahme der Entfernung, die von der Zunahme dv der Geschwindigkeit während dt herrührt, dann folgt aus der 1. Regel $dv = ddx/dt$ (Varignon ist hier genauer als Euler in seiner 1. Mechanik). Wegen des 2. Newtonschen Gesetzes ist

$$dv = ydt$$

oder

$$ddx = ydt^2$$

und es ergibt sich die Relation

$$y = \frac{ddx}{dt^2} \left(= \frac{dv}{dt}\right)$$

(2. Regel).

Varignon wendet diese Regel u.a. auf den freien Fall an. Das Galileische Gesetz besagt, daß

$$x = v^2;$$

somit ist $dx/dt = \sqrt{x}$ oder $x = t^2/4$ und daher folgt aus der allgemeinen Regel:

$$y = \frac{1}{2}$$

(eigentlich $g/2$, wo g die Erdbeschleunigung ist, aber Konstante wurden gleich Eins gesetzt).

Varignon bemerkt auch, daß die beiden Regeln die Beziehung

$$dt = \frac{dx}{v} = \frac{dv}{y}$$

ergeben; daraus folgt

$$ydx = vdv$$

und weiters

$$\int ydx = \frac{v^2}{2}.$$

Dies ist die analytische Form von Newtons Proposition XXXIX, Buch I, in der verlangt wird die Geschwindigkeit für eine gegebene Zentripetalkraft zu bestimmen. Auch in der Mechanik Eulers tritt diese Beziehung auf, die eigentlich der Energiesatz ist.

6.2 Hermanns Theorem

Hermann beweist im ersten Buch seiner Phoronomie mit der Bewegungsgleichung

$$dt = mdu : g,$$

daß es für Beziehungen zwischen Geschwindigkeit u und zurückgelegtem Weg x von der Form

$$u = x^n, \quad n \text{ positiv ganz},$$

keine Kraft g gibt, diese Fälle also in der Realität nicht vorkommen (in Varignons Analyse des Galileische Falles ist $u = x^{1/2}$).

Weil $du = nx^{n-1}dx$ findet man für die Kraft aus der Bewegungsgleichung (im Folgenden ist die Masse $m = 1$ gesetzt)

$$g = nx^{n-1}\frac{dx}{dt} = nx^{n-1}u = nx^{2n-1}.$$

Damit folgt aus der Bewegungsgleichung

$$dt = nx^{n-1}dx : nx^{2n-1} = dx : x^n;$$

die Lösung

$$t = \ln x, \text{ für } n = 1$$

(das ist der von Euler betrachtete Fall) und

$$t = -x^{1-n} : n - 1, \text{ für } n \neq 1;$$

Für beide Lösungen ist die Fallzeit von $x = 0$ unendlich groß. Hermann schließt daraus, daß diese Fälle nicht möglich sind.

Für den Galileischen Fall einer konstanten Kraft g findet er (hier bezeichnet er mit s die Distanz von Ausgangspunkt $s = 0$) die bekannte Lösung

$$s = \frac{g}{2}t^2.$$

6.3 Anmerkungen zu Eulers Mechanik

6.3.1 Erste Mechanik

Euler ist manchmal noch unsicher bezüglich des analytischen Ausdrucks und umständlich bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen. Ein Beispiel für die Unsicherheit ist § 118 ff, wo die Wirkung einer Kraft untersucht wird. Sei dz die Änderung der Weges in einem "Zeitelement" dt aufgrund einer Geschwindigkeit c. Wirkt eine Kraft, dann ändert sich die Geschwindigkeit und damit zusätzlich auch der Weg. Diese Wegänderung ist "unendlich mal viel kleiner" (vgl. auch die Bemerkung, daß der von einer Kraft p hervorgerufene "kleine Weg ... proportional zu pdt^2 ist"); dennoch bezeichnet Euler die Änderung des Weges mit dz und schreibt $dc = \frac{dz}{dt}$. Korrekt ist ddz und $dc = \frac{ddz}{dt}$. In seiner zweiten Mechanik korrigiert Euler diesen Mangel; dort schreibt er, mit geänderten Symbolen: $dds = dvdt$ (s ist die Weglänge).

Zur linearen Bewegung

Aus der Bewegungsgleichung $dc = \frac{p}{A}dt$ folgt mit $dt = dx/c$ und Multiplikation der Gleichung mit c

$$cdc = \frac{p}{A}dx.$$

Integriert ergibt sich der Energiesatz:

$$c^2/2 = \frac{1}{A}\int pdx$$

(vgl. dazu Varignons Bemerkung).

Angewendet auf den freien Fall: Wenn die Kraft entlang der (vertikalen) Bewegung konstant ist, $p = g$, dann folgt aus dem Energiesatz

$$c^2 = \frac{2gx}{A} \quad (+\text{ const}).$$

Euler drückt die Geschwindigkeit c in einem Punkt der Geraden durch eine Höhe aus: Die einem Punkt "zukommende Höhe" ist jene Höhe v, aus welcher ein Körper fallen muß, um diese Geschwindigkeit c zu erlangen. Er definiert v durch die Gleichung

$$v = c^2,$$

d.h. er absorbiert den Faktor $2g/A$ in die zukommende Höhe. Dieser Vergleich tritt schon bei Huygens auf (Tractatus de motu corporum ex percussione, 1703; deutsch: 'Über die Bewegung der Körper beim Stoß', Lehrsatz VIII).

Das Verständnis der Eulerschen Untersuchungen der geradlinigen Bewegung in Zentralkräften, die proportional zu einer Potenz des Abstandes vom Kraftzentrum sind, wird durch die Einführung einer Koordinatenachse erleichtert. Setzt man wie Euler für eine Zentralkraft mit Sitz im Ursprung einfach $p \propto x^n$, dann ist das Verhalten der Funktion x^n für positive und für negative Werte von x zu beachten. Aus dem Energiesatz kann die Lösung leicht gefunden werden. Rein formal folgt

$$\left(c^2 - c_0^2\right)/2 = \frac{1}{An}\left(x^{n+1} - x_0^{n+1}\right).$$

So naiv angeschrieben, ändert die aber Kraft für gerade Werte von n ihren Charakter, wenn man von positiven zu negativen x-Werten geht: Für gerade Potenzen n wird aus einer anziehenden Kraft auf der einen Seite eine abstoßende auf der anderen. Noch genauer ist die Kraft bei nichtganzzahligen Exponenten zu definieren. Deshalb muß für eine in beide Richtungen anziehende Kraft ein anderer Ansatz gewählt werden. Was Euler, geschrieben in moderner mathematischer Sprache, eigentlich zu lösen hätte, ist die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + sgn\left(x\right)\left|x\right|^n = 0.$$

6.3.2 Die moderne Beschreibung der Bewegung des starren Körpers

Euler hatte die Vektorrechnung noch nicht zur Verfügung, daher erscheinen uns heute seine Ableitungen und Formulierungen in der zweiten Mechanik schwerfällig. In moderner Schreibweise ist die analytische Form der ersten beiden Newtonschen Gesetze der Bewegung:

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}$$

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ist der Ortsvektor und $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ der Kraftvektor bzw. das Kraftvektorfeld $\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{x}\right)$; die bei Euler auftretende Konstante λ ist in die Wahl der Maßeinheiten absorbiert worden.

Anstatt für einen starren Körper ein Kontinuumsmodell zu verwenden kann man auch das Konzept der Massenpunkte beibehalten und ihn als ein System von

Massenpunkten mit festen Abständen betrachten. In einem System von Massenpunkten, die sich wechselseitig mit Kräften beeinflussen, die dem dritten Newtonschen Gesetz gehorchen, und auf die gleichzeitig eine Kraft von 'außen' einwirkt, gilt für den i-ten Punkt mit Masse m_i

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} = \vec{F}_{int} + \vec{F}_{ext}.$$

Nun kann man leicht zeigen (s. z.B. Iro, A modern approach to classical mechanics, World Scientific, Singapore 2002), daß unter diesen Voraussetzungen für den Massenmittelpunkt

$$\vec{S} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{x}_i, \quad \text{Gesamtmasse } M = \sum_i m_i$$

mit dem Impuls $\vec{P} = M d\vec{S}/dt$ die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

und für die Bewegung der Punkte um den Massenmittelpunkt, d.i. eine Drehbewegung des Punktensembles, die Gleichung

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_{ext}$$

gelten; hier ist $\vec{L} = \sum_i m_i \left(\vec{x}_i - \vec{S}\right) \times \frac{d\vec{x}_i}{dt}$ der gesamte Drehimpuls – Euler kennt den Begriff Drehimpuls noch nicht – und $\vec{N}_{ext} = \sum_i \left(\vec{x}_i - \vec{S}\right) \times \vec{F}_{ext}$ das gesamte Drehmoment der Kraft $\vec{F}_{ext}$, beide bezogen auf den Massenmittelpunkt. Die beiden Gleichungen sind im Allgemeinen über die äußere Kraft gekoppelt. Verschwindet die äußere Kraft, dann hat man unmittelbar zwei *unabhängige* Größen, die zeitlich konstant sind:

$$\vec{P} \text{ und } \vec{L} \text{ sind konstant.}$$

Diese Unabhängigkeit hat Euler eventuell gefühlt, wenn er seine Gleichung der Drehbewegung als unabhängiges, neues Prinzip betrachtete (E177).

Die Rotation starrer Körper

Die Berechnung des Trägheitstensors erfolgt bequemerweise in einem Kontinuumsmodell. Der Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) ist

$$\vec{S} = \int d^3x \vec{x} \rho\left(\vec{x}\right),$$

$\rho(\vec{x})$ ist die Massendichte (Eulers $dm = \rho d^3x$). Ausgezeichnete Punkte für die Wahl als Ursprung des Koordinatensystems sind entweder der Schwerpunkt $\vec{S}$ oder ein anderer, eventuell vorhandener Drehpunkt. Der Trägheitstensor I_{ik}

$$I_{ik} = \int d^3x \rho(\vec{x}) \left(\vec{x}^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right), \quad i, k = 1, 2, 3$$

ist symmetrisch (und positiv); er kann daher durch eine orthogonale Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalform gebracht werden, die orthogonale Transformation stellt eine Drehung des Koordinatensystems dar. Im gedrehten System ist der Tensor diagonal, er hat die Form

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} Ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & Mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & Mc^2 \end{pmatrix};$$

die I_i sind die (positiven) Hauptträgheitsmomente. Der Trägheitstensor I_{ik} bestimmt die Energie der Rotation

$$E = \frac{1}{2} \omega_i I_{ik} \omega_k,$$

und den Drehimpuls

$$L_i = I_{ik} \omega_k$$

mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Dies ist in Analogie zu den Ausdrücken für die Translation zu sehen: $E_{trans} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$ und $\vec{p} = m\vec{v}$, d.h. die Winkelgeschwindigkeit entspricht der Translationsgeschwindigkeit, $\vec{\omega} \leftrightarrow \vec{v}$, und das Trägheitsmoment ist ein Maß für den Widerstand gegenüber Änderungen des gleichförmigen Rotationszustandes, wie die Masse der Widerstand gegenüber Änderungen des gleichförmigen Translationszustandes ist, $I_{ik} \leftrightarrow m$. Die Eulerschen Kreiselgleichungen sind die Bewegungsgleichungen $d\vec{L}/dt = \vec{N}_{ext}$ im mitrotierenden Koordinatensystem der Hauptachsen des Körpers.

Zur Kopplung von Translations- und Rotationsbewegung

Für einen auf einer schiefen Ebene abrollenden Zylinder mit Radius R, Masse M und Trägheitsmoment I bezüglich der Zylinderachse besteht die Gesamtenergie E_{ges} aus der Translationsenergie und der Rotationsenergie des Zylinders sowie dem Potential der Schwerkraft:

$$E_{ges} = Mv^2/2 + \omega^2 I/2 + Mgz \sin\alpha;$$

v ist die lineare Geschwindigkeit des Zylinders, g ist die Schwerebeschleunigung, z die aktuelle Höhe auf der schiefen Ebene und α ist der Neigungswinkel der Ebene. Die Bedingung des Rollens

$$v = R\omega,$$

die hier die Kopplung der beiden Bewegungen bewirkt, liefert

$$E_{ges} = \frac{v^2}{2}\left(M + I/R^2\right) + Mgz\sin\alpha.$$

Daraus ergibt sich, daß bei gegebener Gesamtenergie E_{ges}, gleicher Masse M und gleicher Höhe z, der Zylinder mit dem größeren Trägheitsmoment eine kleinere Geschwindigkeit v haben muß.

6.4 Poinsot

Dem Trägheitstensor I kann eine quadratische Form zugeordnet werden:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i,k=1}^{3} x_i I_{ik} x_k.$$

Wegen der Eigenschaften von I_{ik} ist die quadratische Form positiv definit und $f(\vec{x}) = const$ stellt daher ein Ellipsoid dar. Der kräftefreien Rotationsbewegung eines Körpers, d.h.

$$E = \frac{1}{2}\omega_i I_{ik}\omega_k = \text{constant}$$

und

$$L_i = I_{ik}\omega_k = \text{ constant}$$

entspricht ein Abrollen des Ellipsoids $f(\vec{\omega}) = 2E$ auf einer Ebene, welche senkrecht auf den konstanten Drehimpuls steht und daher fest liegt.

Literatur

Blay M., La naissance de la mécanique analytique, Presses Universitaires de France, Vendôme 1992

Euler L., Mechanica sive Motus Scientia Analytice exposita (1736), deutsche Übersetzung als 'Mechanik oder analytische Darstellung der Wissenschaft von der Bewegung' 1. u. 2. Teil, mit Kommentar von J.Ph. Wolfers, 2 Bde, C.A. Koch, Greifswald 1848 und 1850

Euler L., Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum (1765), deutsche Übersetzung als 'Mechanik oder analytische Darstellung ...' 3. Teil: 'Theorie der Bewegung fester oder starrer Körper', mit Kommentar von J.Ph. Wolfers, C.A. Koch, Greifswald 1853

Euler L., Opera omnia II, 5, Commentationes mechanicae - principia mechanica, ed. J.O. Fleckenstein, Zürich 1957
Opera omnia II, 6-7, Commentationes mechanicae ad theoriam punctorum pertinentes, ed. C. Blanc, Zürich 1957 und 1958
Opera omnia II, 8-9, Commentationes mechanicae ad theoriam

corporum rigidorum pertinentes, ed. C. Blanc, Zürich 1965 und 1968
Opera omnia II, 10-11/1, Comentationes mechanicae ad theoriam corporum flexibilium et elasticorum pertinentes, ed. F. Stüssi und H. Favre bzw. F. Stüssi und E. Trost, Zürich 1947 und 1957
Opera omnia II, 11/2, The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788, A.C. Truesdell, Zürich 1960
Opera omnia II, 12-13, Commentationes mechanicae ad theoriam corporum fluidorum pertinentes, ed. A.C. Truesdell, Zürich 1954 und 1955

Hermann J., Phoronomia sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum, Wetstenios, Amsterdam 1716

Lagrange J. L., Méchanique analitique (1788); Analytische Mechanik, deutsche Übersetzung von H. Servus, Springer, Berlin 1887

Newton I., The Principia, englische Übersetzung von A. Motte, Prometheus Books, New York 1995

Newton I., Mathematische Prinzipien der Naturlehre, deutsche Übersetzung von J. Ph. Wolfers, enthält auch Newtons 'Weltsystem', Nachdruck der Auflage von 1872, Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt 1963

Poinsot L., Théorie nouvelle de la rotation des corps, Bachelier, Paris 1852